COLEGIO DE BACHILLERES

SISTEMA DE ENSEÑANZA ABIERTA

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

2

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A.

MEXICO 1981

C.E.C.S.A.

9629

CA 276

AUTORES
Diego Bricio Hernández
Alberto Ruiz Moncayo

ASESOR DE CONTENIDO UAM
José Angel Canavati Ayub

ASESOR PEDAGOGICO
María Reyes Pérez Estévez

ASESOR EN AUDIOVISUAL
Aurora Conde Pinzón

COORDINACION EDITORIAL
José González Melchor

COORDINACION AUDIOVISUAL
Leonel Bello Cuevas

COORDINACION DIDACTICA
Ana Rosa Gómez Carbajal

COORDINACION GENERAL
Agustín Buendía Espinosa

DIRECTOR GENERAL DEL C. B.
Mtro. J. Angel Vizcaíno P.

SRIO. GRAL. ACADEMICO DEL C. B.
Mtro. Gabriel Pérez Rivero

DIR. PLANEACION ACADEMICA
Lic. Silvia Buentello Rebollo

JEFE DEL
CENTRO DE ENSEÑANZA ABIERTA
Mtro. Omar Guillén Oliva

El Colegio de Bachilleres es un organismo público principalmente al servicio de los jóvenes de escasos recursos económicos, con aspiraciones firmes para alcanzar más elevados niveles culturales y mejores condiciones de vida. Representa, en efecto, una ampliación de oportunidades para obtener el bachillerato. Así lo establece el Decreto que lo creó: se imparte enseñanza escolar y extraescolar. La primera se realiza actualmente en 22 planteles, de los cuales funcionan tres en la Ciudad de Chihuahua y 19 en el área metropolitana de la Ciudad de México.

Las actividades extraescolares se desarrollan con entusiasmo y singular éxito. Tal es el caso del sistema de enseñanza abierta, una excelente oportunidad para muchas personas que no pueden dedicar tiempo completo o medio tiempo a sus estudios, pero que están dispuestas a continuarlos.

El Colegio de Bachilleres cumple el compromiso de la enseñanza abierta con la máxima seriedad académica, con eficiencia técnica y responsabilidad administrativa. En efecto, ha dedicado al SEA un esfuerzo muy cuidadoso para elaborar, implementar y realizar un programa de trabajo de reconocida calidad e integrar un equipo humano, académico y técnico, capacitado específicamente y dotado de todos los recursos posibles.

Es necesario reiterar que la enseñanza abierta no es complementaria de la escolar ni pretende sustituirla; tiene indudablemente validez por sí misma a nivel nacional; esto es, quienes concluyan su bachillerato en el SEA del CB tendrán derecho, satisfechos los requisitos del caso, a ingresar a cualquiera de las instituciones de educación superior del país o del extranjero, en igualdad de posibilidades con todo bachiller.

En la convicción de que los resultados del SEA son y deben seguir siendo de buena calidad, el Colegio de Bachilleres ha contratado los servicios profesionales de un numeroso grupo de profesores de reconocida competencia académica, para atender las necesidades de composición de textos especiales, por su calidad y por su orientación pedagógica, para los educandos inscritos en el SEA.

El objeto primordial de este texto es el de servir de guía efectiva, satisfactoria y agradable, de tal manera que el educando pueda realizar sus estudios bajo su cuidado y responsabilidad, y lo haga con alegría y, sobre todo, con éxito. En definitiva, al estudiante le resultará muy agradable su esfuerzo y, además, altamente provechoso y formativo de una nueva y recia personalidad, socialmente más útil y, en lo individual, plenamente realizada.

Este libro ha sido hecho con cariño y en función directa de bien servir tus intereses y requerimientos de orden académico, amigo estudiante. En esa convicción, el Colegio lo pone en tus manos.

MTRO. J. ANGEL VIZCAINO P.
DIRECTOR GENERAL DEL
COLEGIO DE BACHILLERES

Primera Edición, 1981.
Impreso en México.

EDITORES EXCLUSIVOS. COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A.
CALZ. DE TLALPAN NUM. 4620, MEXICO 22, D.F.
MIEMBRO DE LA CAMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA EDITORIAL REGISTRO NUM. 43

CLAVES DE ESTUDIO

Este es un texto diagramado. Le hemos denominado así porque presenta en forma gráfica y objetiva los distintos aspectos que integran los temas de estudio.

Para facilitar el estudio y como una guía del proceso de aprendizaje, este texto diagramado presenta las siguientes características que irá observando:

Ideas preliminares

Al principio de cada secuencia se presentan las **ideas preliminares.** Estas ideas le dan un panorama general de la importancia del tema que va a estudiar y de sus posibles aplicaciones en la vida práctica, o de las relaciones que tiene con sus experiencias o conocimientos adquiridos.

Conceptos definiciones y fórmulas

El texto en negritas enmarcado se refiere a conceptos, definiciones o fórmulas que usted debe retener en su memoria por ser fundamentales y para poder contestar acertadamente las evaluaciones.

EJERCICIOS DE APLICACION

Procure realizar estos ejercicios para comprobar y afirmar sus conocimientos, sin presión de tiempo ni preocupación de resultados, realícelos en un momento de tranquilidad y reposo.

SUGERENCIAS DE ESTUDIO

Las sugerencias de estudio no deben quedar en el olvido. Si usted quiere reafirmar o ampliar sus conocimientos o complementar los temas presentados en su texto diagramado, propóngase realizar las actividades recomendadas. Para facilitarse su realización le estamos señalando la consulta de libros de fácil acceso en bibliotecas o en su Centro de Estudios, además, le indicamos el capítulo y la página.

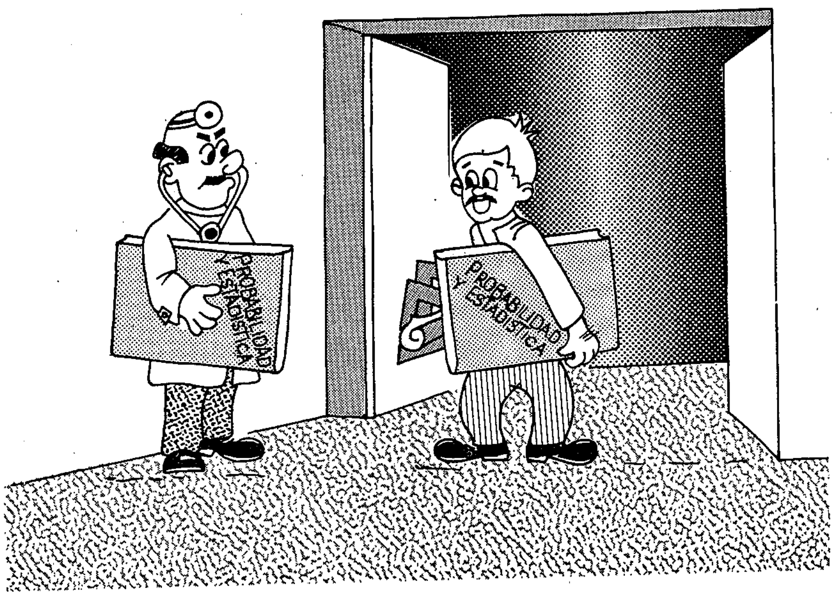
También le indicamos los radiomódulos y telemódulos que usted puede escuchar o ver en su Centro de Estudios, no se los pierda, compruebe que es más fácil y atractivo aprender con las ayudas audiovisuales que hemos preparado especialmente para usted.

N.B.

Fíjese bien. Cuando antes de un texto vea esta abreviatura N.B. **(nota bene** expresión latina que significa fíjese bien), es un llamado de atención para que usted observe con cuidado una explicación o una instrucción que se le da enseguida.

PRE SENTA CION

Este Módulo tiene como propósito fundamental hacerle tomar parte en la construcción del modelo matemático de los hechos del azar; es decir, del **espacio probabilístico.** Este no es el único modelo que puede proponerse para ese tipo de situaciones, ya que existen otros como los **conjuntos difusos,** pero el modelo que aquí trataremos es uno que ha encontrado un gran número de aplicaciones en diversos campos, que van de las ciencias exactas y naturales a las ciencias sociales; pasando por la medicina, la ingeniería, la agricultura y muchas otras áreas de la ciencia aplicada.



Quisiéramos enfatizar el propósito de involucrar y alejar a usted de una posible actitud pasiva, que no consideramos conduzca a ningún aprendizaje. Para ello, utilizaremos un método de presentación que consiste en plantear preguntas y problemas en el transcurso de la exposición y, de esta manera, hacer que su atención se enfoque sobre aquellos puntos que más la requieren.

Por otro lado, el contenido de este Módulo tiene como propósito central el proceso mismo de abstracción, entendido como paso de la realidad concreta a la esfera de lo abstracto y, abiertamente, evita enfrentarlo con un objeto abstracto ya construido.

En las secuencias 3 (Algebra de eventos) y 4 (Espacio probabilístico) es donde construiremos el modelo. En la primera de las dos aprenderemos a representar los resultados y los eventos de un experimento mediante objetos matemáticos (conjuntos); en tanto que en la secuencia 4 aprenderemos a evaluar los distintos eventos mediante la función de probabilidad. Durante todo el proceso mantendremos una actitud totalmente empirista, que hace recaer la elección del modelo matemático en la información empírica.

Este tratamiento irá precedido de una breve reseña histórica, destinada a bosquejar la evolución de la idea de probabilidad, a la vez que a ilustrar con este caso la dependencia de los conceptos científicos de las circunstancias sociohistóricas de las que nacen.

La secuencia 2, El caso finito, tiene como finalidad presentar una instancia muy específica del espacio probabilístico; es decir, aquel que está asociado con los experimentos que tienen un número finito de resultados. Además de su sencillez, este ejemplo tiene la virtud de ser aplicable en una extensa variedad de casos de interés y además de que no requiere de herramientas matemáticas más allá de los principios básicos del análisis combinatorio. Para su comodidad desarrollaremos las leyes básicas del contar a partir de primeros principios. En esta secuencia presentaremos el problema de la **estadística de partículas,** situación que utilizaremos a lo largo de la primera unidad para ilustrar los conceptos que utilicemos y, también, como material de motivación. Este material constituye una especie de **leit motiv*** para esta unidad y se presenta en un contexto que ilustra el papel que juegan la matemática, la ciencia y la tecnología en el conocimiento humano.

El modelo espacio de probabilidad nació del esfuerzo por sintetizar los aspectos **generales** de los fenómenos o experimentos aleatorios, para que, al trabajar con él, se obtengan resultados que tengan validez para todos los modelos de espacio de probabilidad específicos a los experimentos o fenómenos aleatorios.

---

* Nota. Este término viene del alemán y significa hilo conductor.

Con objeto de acercarnos más a esta finalidad es necesario enriquecer el modelo general introduciendo conceptos como: probabilidad condicional, independencia de eventos, el concepto de variable aleatoria y su distribución probabilística y el valor esperado o esperanza de una variable aleatoria. Con estos conceptos adicionales podremos formular una mayor cantidad de problemas y prepararemos el camino para estudiar algunas consecuencias importantes del modelo, el cual es el objeto de estudio del Módulo 3 de esta serie. La segunda unidad de este Módulo se ocupa de enriquecer el modelo mediante estos conceptos.

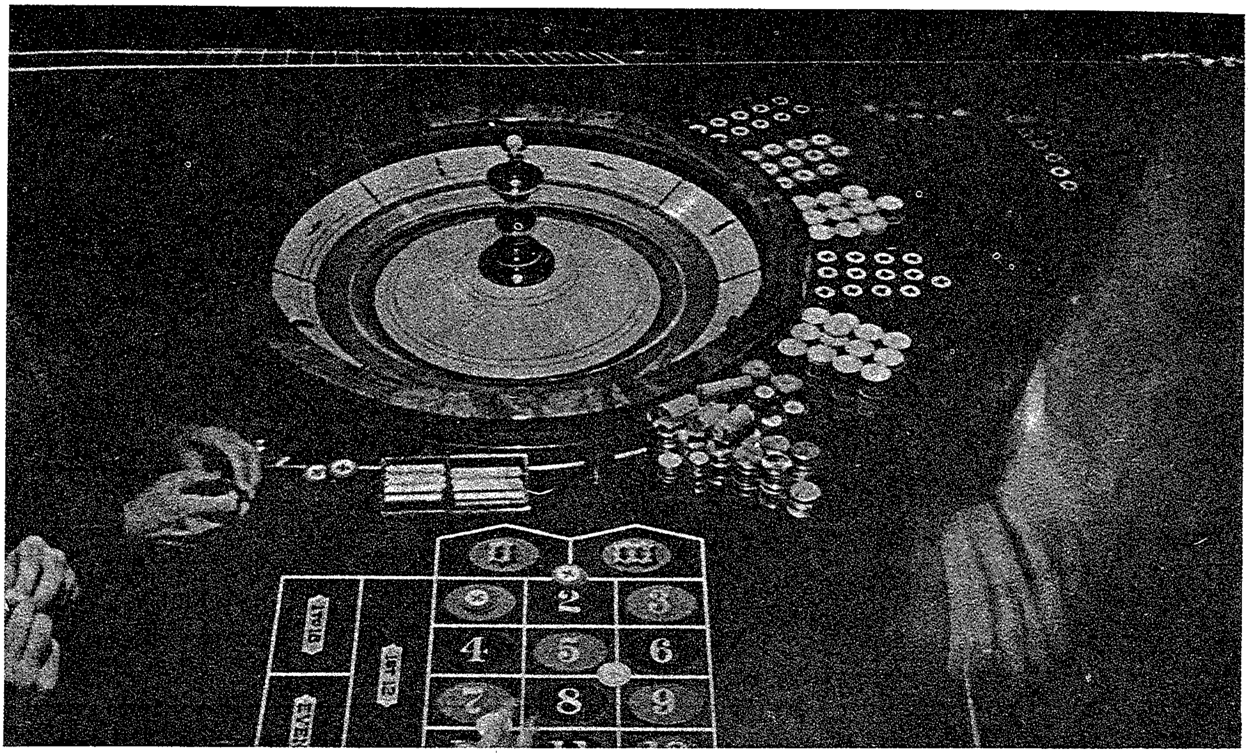
De cuando en cuando se insertan comentarios informales. Dichos comentarios son parte integral de este material, pues constituyen llamadas de atención al lector cuyo propósito es hacerle participar activamente en la lectura. De ninguna manera deben ignorarse, sobre todo si tomamos en cuenta que una gran proporción de los lectores de esta obra realizan sus estudios en el Sistema de Enseñanza Abierta y no cuentan con una guía directa por parte de un profesor.

LOS AUTORES

CONTENIDO

EL MODELO PROBABILISTICO

MODULO 2



OBJETIVOS

Al finalizar el estudio de este Módulo, usted podrá:

1. Diferenciar entre situaciones determinísticas y no determinísticas.
2. Construir modelos probabilísticos para situaciones simples no determinísticas.
3. Aplicar el concepto de probabilidad a la resolución de problemas sencillos.
4. Aplicar los conceptos de independencia y condicionamiento a la resolución de problemas sencillos.
5. Introducir los conceptos de variable aleatoria y valor esperado y aplicarlos en la resolución de problemas sencillos.

UNIDAD 1

CONSTRUCCION DEL MODELO

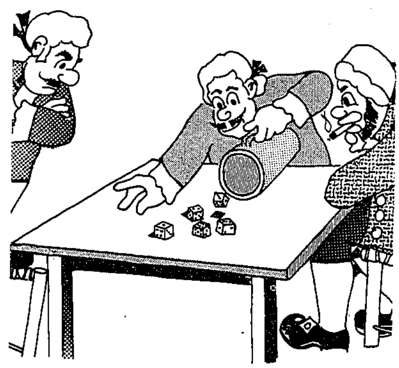
SECUENCIAS	OBJETIVOS
	Al finalizar el estudio de esta unidad, usted podrá:
1. Desarrollo histórico.	1.1 Reseñar brevemente la evolución histórica del concepto de probabilidad.
2. El caso finito.	2.1 Hacer una crítica elemental de la idea de equiprobabilidad.
	2.2 Aplicar los principios básicos del contar.
3. Algebra de eventos.	3.1 Diferenciar entre situaciones determinísticas y otras no determinísticas.
	3.2 Representar los eventos asociados a un experimento mediante el álgebra de conjuntos.
4. Espacio probabilístico.	4.1 Asignar valores de verdad a los eventos asociados a un experimento.
	4.2 Distinguir entre los diferentes enfoques a la probabilidad.
	4.3 Aplicar las leyes elementales del cálculo de probabilidades.

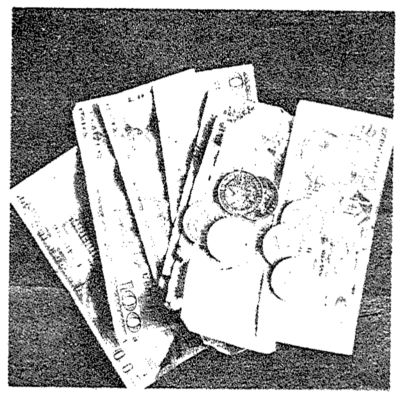
Secuencia 1

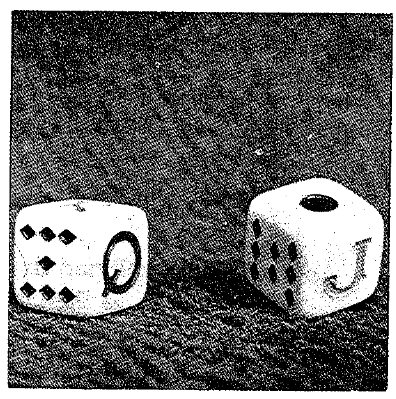
Desarrollo histórico

El interés del hombre por los hechos y actividades en que aparece en forma manifiesta el azar es tan antiguo como el hombre mismo; algunos murales encontrados en tumbas egipcias muestran a nobles sentados frente a una mesa y enfrascados en lo que parece ser un **juego de azar.** Ya bien conocidas en la antigüedad eran también algunas prácticas similares a los seguros modernos; se sabe que los colegios o cofradías romanas pagaban una suma de dinero a los parientes de cualquiera de sus miembros que hubiese muerto. Esta costumbre fue heredada por las cofradías de la Edad Media, las cuales también practicaban este tipo de actividades. El comercio marítimo fue también responsable de la aparición de otro tipo de seguros en la época de los griegos, que consistían en **préstamos** o **hipotecas** sobre barcos; los préstamos se pagaban con intereses si el barco llegaba a puerto con su carga y en caso contrario se cobraba como un seguro.

Ideas preliminares







Si bien es cierto que la historia de los seguros no es bien conocida, también es cierto que la de los **bancos** y el **intercambio** monetario sí está bien respaldada por documentos. En efecto, se sabe que durante el siglo V a.C. los bancos ya estaban bien establecidos en Atenas y que los italianos, específicamente los florentinos, tenían en el siglo XIV d.C. bancos en la mayoría de las capitales europeas, con las cuales comerciaban intensamente. Con objeto de controlar los procesos de **inflación** y **deflación** que tales prácticas desataron (y que tan bien conocemos nosotros, por desgracia) se plantearon ciertos **problemas de tipo actuarial** que se resolvieron mediante técnicas probabilísticas rudimentarias. Así, por ejemplo, en 1552 Sir Thomas Gresham estableció restricciones cambiarias con Flandes y Amberes, como una medida con miras a restablecer el desfalleciente crédito inglés.

Sin embargo, no fue sino hasta el Renacimiento que el concepto de **probabilidad** empezó a tomar forma explícita, aunque sólo de vez en cuando llegaban a oídos de los matemáticos los problemas que surgían de los juegos de azar, a que tan afectos eran los nobles de la época. En el siglo XVI algunos de ellos atrajeron la atención de **Galileo** (1564-1642) hacia un problema de dados. El problema era el siguiente:

Primer problema relacionado con el azar atacado con métodos matemáticos (siglo XVI)

Si al lanzar tres dados se considera la suma de sus resultados, se puede obtener un 9 de seis maneras distintas e igualmente para el 10; sin embargo, la experiencia muestra que el 10 aparece con más frecuencia que el 9. ¿Cómo se puede explicar esta contradicción aparente?

Solución del problema

En 1618 Galileo explicó que existen 216 maneras de tirar los tres dados, 27 de ellas favorables para el 10 y 25 para el 9 y, en consecuencia, debería aparecer el 10 con mayor **frecuencia** que el 9.

Doce años después de la muerte de Galileo, se inició una correspondencia entre los matemáticos franceses **Pascal** (1623-1662) y **Fermat** (1601-1665) que de hecho marca el **nacimiento de la teoría de la probabilidad.** El Caballero De Meré, noble francés interesado tanto en la matemática como en los juegos de azar, planteó ciertas preguntas a Pascal en 1654, quien a su vez se las comunicó a Fermat.

El juego del Chevalier De Meré

Una de las preguntas era acerca de un juego que consistía en tirar un par de dados 24 veces y apostar a favor o en contra de la ocurrencia de por lo menos un doble 6 durante el juego.

Algunas consideraciones teóricas hicieron pensar a De Meré que era preferible apostarle al doble 6; sin embargo, los ensayos empíricos efectuados por él parecían contradecir esta conclusión.

La solución de Pascal

Según Pascal si los dados son "honestos" o "no sesgados" (es decir, que cada uno de ellos cae con igual frecuencia en cada uno de sus seis lados), la frecuencia relativa de los juegos con por lo menos un doble 6 es de 0.491. Esto indica que el análisis de De Meré era incorrecto y explica las observaciones hechas por él.

Es importante notar que Pascal trabajó con un **modelo matemático** de la situación, que incluía suposiciones bastante serias acerca del comportamiento del mundo; por ejemplo, ¿son honestos los dados?

Aplicabilidad del modelo de Pascal

En virtud de ello, hubiera sido muy legítimo que el Caballero De Meré tuviera dudas al aplicar el resultado de Pascal: primero debería decidir si sus dados eran o no honestos, **decisión** que requiere de **métodos estadísticos** para llegar a ella.

Al resolver otro problema planteado por De Meré —el llamado **problema de los puntos**— fue cuando Pascal introdujo el importantísimo concepto de **esperanza matemática** o **valor esperado,** que fue manejado explícitamente por vez primera por el holandés Huygens (pronúnciese *joijens*) (1625-1695). (Ver la secuencia 4 de la siguiente unidad).

En su tratado *De Ratiocinus in Ludo Aleoe* (1657), el primero en su género, Huygens enunció catorce proposiciones; en la tercera de las cuales dice:

Ganancia esperada en un juego, según Huygens

> *Si un jugador tiene probabilidad* p *de ganar una cantidad* a *y probabilidad* q *de ganar una cantidad* b, *entonces su ganancia esperada es* pa + qb.

Ciencia e ideología dominante

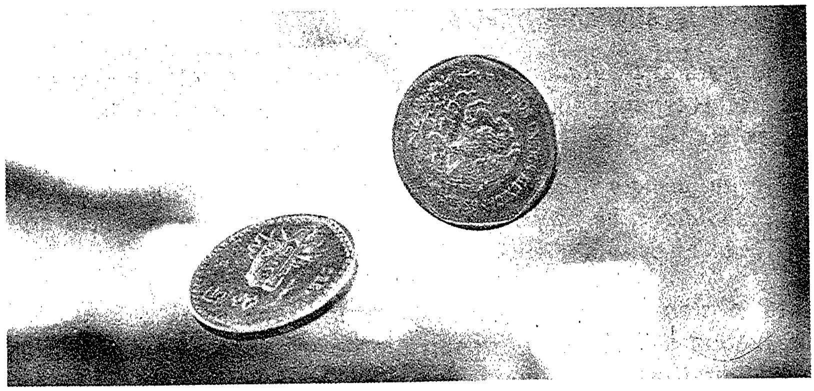
Note la gran influencia que tuvieron los problemas que plantean los juegos de azar en el desarrollo de la probabilidad en Europa continental en esta época. Por otro lado, en Inglaterra (y también en Holanda, por cierto) se desarrolló el estudio de las cuestiones de **demografía urbana** e **intercambio comercial.** En efecto, para esta época, la clase burguesa de estos países había obtenido un poder considerable y estaba muy interesada en estas cuestiones más que en los juegos de azar. Así, en 1662, el capitán **Graunt** encontró un método para utilizar los registros semanales de muertes en Londres para determinar el crecimiento de esta ciudad. Asimismo, el holandés **De Witt** publicó en 1671 sus investigaciones sobre las matemáticas de las rentas anuales. Otro ejemplo es el de **Halley,** famoso astrónomo, que en 1693 publicó sus tablas de primas de seguro de vida.

El periodo que va del final del siglo XVII a mediados del siglo XVIII se hicieron grandes avances en la teoría de la probabilidad, no pocos debidos al genio de **James Bernoulli.** Su obra *Ars Conjectandi* fue publicada ocho años después de su muerte y está dividida en cuatro partes:

- La primera consiste en una reproducción del tratado de Huygens, ampliamente comentado por Bernoulli.
- La segunda parte está dedicada a la teoría de permutaciones y combinaciones.
- En la tercera se resuelven varios problemas relacionados con los juegos de azar.
- En la cuarta se aplican los resultados de la teoría a problemas de tipo económico y social.

Bernoulli y su modelo, conocido como ensayos de Bernoulli

En su tratado, Bernoulli introdujo de manera explícita su modelo conocido como ensayos de Bernoulli. Este consiste en la repetición sucesiva de un experimento, en el cual se considera exclusivamente la ocurrencia o no ocurrencia de un cierto evento.



Por ejemplo, al lanzar una moneda varias veces, se anota cada vez si cayó águila o no. En este modelo se considera que el resultado de una repetición del experimento no afecta el resultado de las otras repeticiones y que la probabilidad de ocurrencia del evento de interés es la misma en cada repetición (ver la secuencia 3 de la primera unidad del Módulo 3 de esta serie).

Sin duda alguna, el resultado fundamental del *Ars Conjectandi* es el teorema denominado **Ley débil de los grandes números,** el cual constituye una asombrosa verificación de la corrección del modelo básico de la probabilidad que vamos a construir en esta unidad (ver la secuencia 4 de la primera unidad del Módulo 3).

Históricamente hablando, la obra que atrae la atención es la de **Montmort.** El desarrolló los conceptos básicos de las diferencias finitas y las relaciones de recurrencia y, en términos generales, mejoró las herramientas matemáticas básicas para la probabilidad.

Ampliación de la obra de Bernoulli

Un continuador de la obra de Bernoulli fue **Abraham De Moivre** que en su obra *The doctrine of Chance* (1718) refinó los resultados de Bernoulli sobre la ley de los grandes números.

Un camino distinto seguido por la disciplina fue el de algunos matemáticos, astrónomos y físicos experimentales europeos que, con el énfasis que pusieron en las mediciones físicas, desarrollaron la llamada **teoría de errores;** este enfoque estudia la variabilidad que existe entre los resultados de eventos independientes que se intenta sean idénticos y resulta de evidente interés en las ciencias experimentales.

En 1770 fue cuando **Lagrange** publicó una memoria sobre el tema, en el que investiga la distribución (es decir, la probabilidad con que toma sus posibles valores) del promedio de un grupo de observaciones; inició así los trabajos sobre un problema fundamental de la probabilidad, el llamado **teorema central del límite** (ver la secuencia 3 de la segunda unidad del Módulo 3) y, también, la teoría de los **intervalos de confianza**, de gran interés en la estadística y sus aplicaciones (ver la secuencia 3 de la unidad 1 del Módulo 4).

Métodos bayesianos de inferencia estadística

También a la estadística pertenecen los trabajos de **Thomas Bayes;** en 1763 fueron publicados (p stumamente) sus trabajos sobre inferencia, donde propone un método inductivo que permite encontrar probabilidades de evento, afinando otras probabilidades dadas *a priori;* de esta manera se precisa el aprendizaje que proporciona un experimento. Este enfoque a la inferencia estadística se le denomina **bayesiano**, el cual ha cobrado importancia en años recientes a pesar de haber sido duramente criticado anteriormente.

La primera síntesis en probabilidad

Tocó a **Laplace** (1749-1827) sintetizar todo lo desarrollado en probabilidad, hasta la época de la Ilustración y lo expresa magistralmente en su *Theorie Analytique des Probabilités,* publicada en 1812. Aquí, Laplace generaliza los trabajos de De Moivre sobre la ley de los grandes números y por primera vez propone la **distribución normal** como distribución de los errores; de hecho, presentó desde un mismo punto de vista las conclusiones teóricas y filosóficas que habían surgido tanto de los problemas ligados con los juegos de azar como de la ya mencionada teoría de errores.

Concepto laplaciano de probabilidad

Laplace, en su tratado, definió la probabilidad de un evento como: el cociente que se obtiene al dividir el número de casos favorables para que ocurra dicho evento entre el número total de casos que pueden darse en el experimento en cuestión.

(Ver la siguiente secuencia, en donde se hace una crítica de esta noción de **equiprobabilidad).**

Otra contribución muy importante de Laplace fue el establecimiento del método estadístico de los **mínimos cuadrados** (ver la secuencia 1 de la tercera unidad del Módulo 1 y también el

Carlos Federico Gauss (1777-1855), astrónomo, matemático y físico alemán, investigó sobre electromagnetismo y óptica.

Módulo 6). Este método fue descubierto independientemente por **Gauss** (1777-1855). Por cierto que fue Gauss a quien tocó situar a la teoría de los errores en un contexto probabilístico, cuando consideró que en mediciones sucesivas de una cierta constante física, el error de medición es una **variable aleatoria** (ver la secuencia 3 de la segunda unidad de este Módulo). El método de los mínimos cuadrados propuesto por Gauss y Laplace equivale al uso de una "función de pérdida cuadrática" en la moderna **teoría de decisiones,** disciplina desarrollada por Abraham Wald aproximadamente 120 años más tarde.

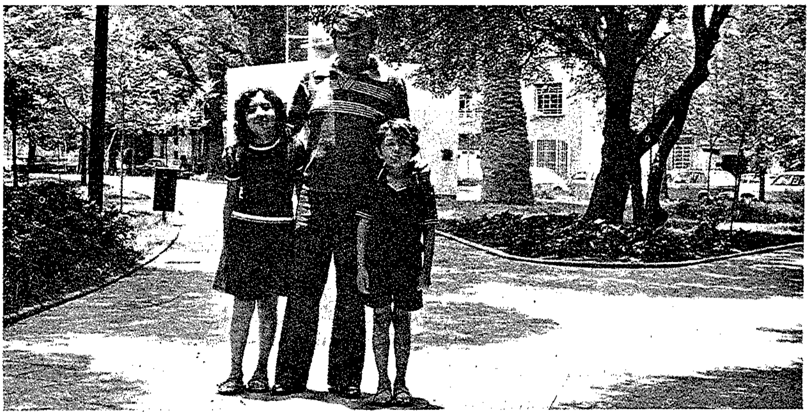
Ciudad de México, 1814.

La revolución industrial del siglo XIX trajo consigo un considerable aumento de la población urbana, lo cual generó problemas de tipo socio económico cuyo manejo por métodos deterministas (los únicos de que disponía la ciencia de la época) era imposible. Esta situación motivó desarrollos estadísticos, entre los cuales se pueden mencionar los siguientes:

- Alrededor de 1860, durante el curso de una investigación de las posibles relaciones entre las estaturas de padres e hijos, **Sir Francis Galton** (1822-1911) llegó al primer modelo de lo que actualmente se conoce como **regresión** (ver el Módulo 6).
- En 1837, Simeon Poisson (pronúnciese *puasón*) (1781-1840) publicó su libro *Investigaciones acerca de la probabilidad en juicios en materia criminal y en materia civil, precedidos de reglas generales del cálculo de las probabilidades,* estudio en el que propuso la

Simeón Denis Poissón (1781-1840), físico y matemático francés.

distribución que ahora lleva su nombre (ver la secuencia 1 de la segunda unidad del Módulo 3). Pocos años después, **Quetelet** encontró que el número de hombres que morían por patadas de caballo en ciertos cuerpos del ejército prusiano podía describirse mediante la distribución de Poisson.



Andrej N. Kolmogoroff, matemático ruso contemporáneo.

La segunda síntesis en probabilidad

Desde la segunda mitad del siglo XIX hasta los primeros veinte años de este siglo, el desarrollo de la teoría de la probabilidad estuvo ligado, en gran medida, a los nombres de los matemáticos soviéticos **Chebycheff** (1821-1894), **Markoff** (1856-1922) y **Liapunoff** (1857-1918). Una de las contribuciones que mejor caracteriza el trabajo de estos autores es la introducción y uso extensivo del concepto de **variable aleatoria.** Otros matemáticos que han hecho importantísimas contribuciones a este campo son los soviéticos **Jinchin** y **Kolmogoroff** y el francés **Paul Levy** (1886-1971), los cuales siguieron las ideas básicas introducidas por el también francés **Emile Borel** (1871-1956) a principios de este siglo. En particular, en 1934 Kolmogoroff culminó los esfuerzos de varios autores, al establecer sobre bases firmes la teoría de la probabilidad, cuando propuso el concepto de **espacio probabilístico** como modelo matemático de los hechos del azar. El resto de este Módulo se ocupa de desarrollar este concepto.

La probabilidad y la estadística son fundamentales en la preparación de todo tipo de profesionales

En las últimas décadas de este siglo se ha incrementado notablemente el papel que juega la teoría de la probabilidad en la ciencia y tecnología moderna; esto ha ocasionado, en forma natural, que el estudio de esta disciplina pase a formar parte de la preparación que requieren nuestros futuros científicos e ingenieros, junto con la **estadística,** que es de gran importancia para cualquiera que tenga que aplicar la probabilidad, ya sea en la formulación de leyes científicas o en la toma de decisiones.

El desarrollo de la estadística se inició con la búsqueda de distribuciones de estadísticas de muestreo

Igual que pasó con la probabilidad, la estadística se desarrolló intensamente desde finales del siglo XIX y principios del XX y la teoría se inició con la búsqueda de distribuciones de **estadísticas de muestreo** (medias, varianzas, etc.). Al respecto, en 1900 Karl Pearson llegó a la importantísima **distribución** χ^2 (léase ji cuadrada), la cual veremos en la secuencia 4 de la unidad "Pruebas de hipótesis" en el Módulo 5.

$$\chi^2 \sim \Sigma\left(f_{i\ \text{observada}} - f_{i\ \text{esperada}}\right)$$

$$t \sim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Esta distribución corresponde a la discrepancia entre frecuencias observadas y frecuencias esperadas bajo ciertas hipótesis y se usa para decidir si la discrepancia es muy grande o no, con objeto de poder emitir juicios acerca de la validez de la hipótesis en cuestión.

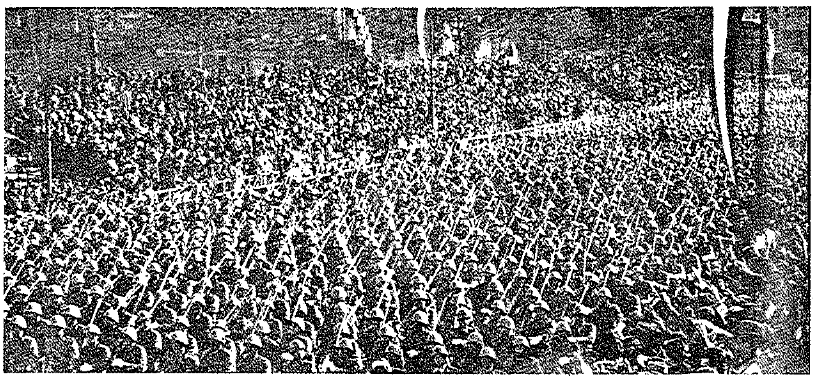
Con el mismo espíritu, en 1908 el químico W.S. Gosset (*Student*) encontró la distribución de las medias de muestras, conocida como la **distribución t**, que veremos en la secuencia 2 de la unidad "Estimación" en el Módulo 4.

Irving Fisher (1867-1947), matemático y economista norteamericano.

A **Sir Roland A. Fisher** (1890-1962) tocó realizar trabajos que dieron a la estadística el impulso más fuerte que ha recibido hasta ahora. Sus trabajos enfatizan el uso de los **modelos lineales** (ver el Módulo 6). Desarrolló para ello la técnica de **análisis de varianza,** así como la teoría y la práctica del **diseño de experimentos,** de indudable importancia en las ciencias experimentales. Fisher también contribuyó de manera decisiva en el terreno de **las pruebas de hipótesis** (Módulo 5), campo al que **Jerzy Neyman** y **Egon Pearson** hicieron trascendentales aportaciones en un trabajo publicado en 1933. También, a Neyman se debe una formulación más completa de la técnica de estimación mediante **intervalos de confianza** (ver las secuencias 3 y 4 de la unidad "Estimación" en el Módulo 4).

Los desarrollos más recientes en estadística

La solución de algunos problemas prácticos que se presentaron durante la Segunda Guerra Mundial en los E.E.U.U., condujo a **John von Neumann** (pronúnciese *fon noiman*) a desarrollar la **teoría de los juegos.** Conjugando estos conceptos con los de la inferencia estadística, Abraham Wald aportó el concepto de **funciones de decisión.** Este enfoque permite dar un tratamiento unificado a los problemas de inferencia estadística, el cual se ha venido cultivando desde la postguerra.



Ciudad de Italia, 1935.

EJERCICIOS DE APLICACION

N.B. Estos ejercicios han sido preparados para que usted aplique lo que aprendió. Realícelos, le ayudarán a reafirmar sus conocimientos. Si tiene alguna duda, consulte a su asesor.

La manera de comprobar la exactitud de sus respuestas, es comparándolas con el contenido incluido en el texto y/o comentándolas con su asesor.

1. Investigue en la bibliografía sugerida o en la que usted considere conveniente:

   Las ideas que tenían los mayas acerca de las matemáticas y la probabilidad.

   Si hubo algún desarrollo de la probabilidad en alguna de las culturas no europeas del mundo antiguo.

2. Redacte un breve ensayo acerca de las diferencias entre el desarrollo de la probabilidad en la Europa continental en el siglo XVII y el que se daba en Inglaterra en esa época.

3. Con base en el ensayo anterior, ¿qué le sugiere en relación con las condiciones sociales importantes en la época?

4. Realice una encuesta entre sus compañeros y allegados encaminada a detectar:

   El uso del término probabilidad.

   ¿Qué significa para ellos este término?

   La importancia de los juicios probables en la vida diaria.

N.B. Después de haber realizado los ejercicios, usted podrá afirmar su aprendizaje. Lo que no haya sido muy claro o no haya podido captar perfectamente, coméntelo con su asesor.

SUGERENCIAS DE ESTUDIO

Para ampliar su información se sugiere que:

- Consulte los siguientes libros:

  FRECHET, MAURICE, **Las matemáticas y lo concreto,** México, UNAM, 1958, (Colec. Problemas científicos y filosóficos, 10).

  RUIZ MONCAYO, ALBERTO, **Introducción a la probabilidad,** México, Edit. Fondo de Cultura Económica, 1976, cap. introductorio, sec. 5.

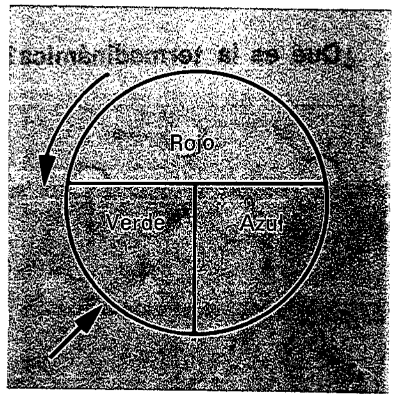
Secuencia 2

El caso finito

Ideas preliminares

En la secuencia anterior hemos dado una visión, a vuelo de pájaro, del desarrollo histórico de las principales ideas de la probabilidad. Resalta el hecho de que en 1812, **Laplace** basó su concepto de la probabilidad en la idea de la **equiprobabilidad** de los diferentes resultados de un experimento, **bajo la condición de que sólo haya un número finito de posibilidades en cada realización de dicho experimento.** El enfoque laplaciano permite describir adecuadamente los juegos de azar habituales, en los que no hay ninguna razón *a priori* que nos haga suponer que un resultado tiene más posibilidades que otro.

Sin embargo, no cuesta trabajo pensar en situaciones en las que falla la hipótesis de equiprobabilidad. Por ejemplo, considérese una ruleta dividida en tres sectores: uno rojo de 180°, uno verde de 90° y otro azul de la misma abertura. El centro de la ruleta debe estar fijo en una mesa horizontal perfectamente balanceada, en la que debe haber dibujado una flecha que apunte hacia el centro de la rueda. Al girar la ruleta libremente hasta que se detenga y anotar el color al que apunta la flecha se pueden dar sólo tres resultados: rojo, verde o azul.



Nuestra experiencia al respecto indica que no es correcto suponer que estos tres resultados son igualmente probables, y que, de hecho, una asignación de probabilidades en la proporción:

$$2 : 1 : 1$$

conduce a predicciones que van más de acuerdo con las observaciones.

En esta secuencia abordaremos el estudio matemático de experimentos con un número finito de resultados, hasta llegar a un modelo general para ellos. De este modelo se puede obtener, como caso particular, la asignación de probabilidades tomando en cuenta la teoría de Laplace. Como expediente para motivar la discusión y dar un hilo conductor para la misma, nos valdremos de una versión elemental del problema de asignación de energía a las integrantes de un sistema de partículas, problema de gran interés en la física y cuya consideración motivaremos en los párrafos que siguen.

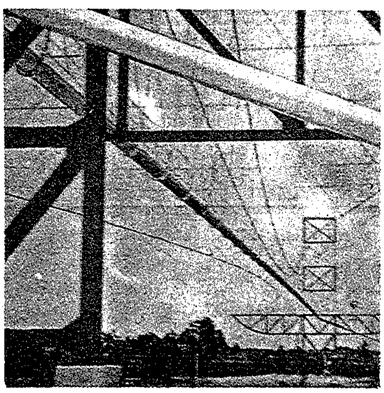
Motivaciones

Es bien conocida la importancia que para la economía del país tiene su industria petrolera. En particular, México comercia (en el mercado interno y en el extranjero) grandes volúmenes de **gas natural,** que se bombea de los centros de producción a los de consumo por medio de ductos construidos para ese fin o **gasoductos.** Resulta de mayor interés para la economía del país que se pueda garantizar un cobro justo por los envíos de gas natural; dado que sólo mediciones de presión y temperatura pueden hacerse en los ductos de este tipo, se requiere poder cuantificar el gas a partir de mediciones de este tipo. La **termodinámica** viene al auxilio del ingeniero y le permite resolver estos problemas.

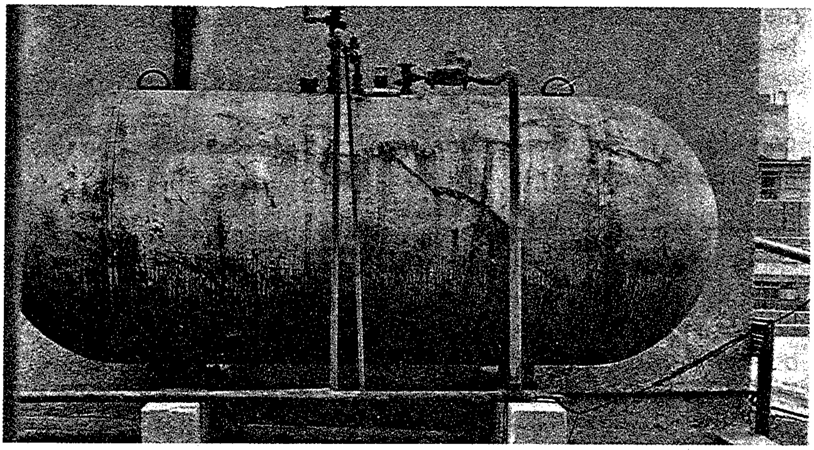
¿Cómo se preparan las cuentas del gas?

¿Qué es la termodinámica?

La termodinámica estudia las diferentes formas de la energía, las posibilidades de conversión de una forma en otra y la manera en que se reparte la energía entre las diferentes partes que constituyen un **sistema.** Busca caracterizar a un sistema en términos de sus propiedades **físicas** (temperatura, presión), **geométricas** (volumen, aérea) y **químicas** (composición), especificando así el **estado** del mismo; le interesan las transformaciones que sufren dichas propiedades y las que constituyen los llamados **procesos** termodinámicos.



Gasoducto.



Por ejemplo, se puede describir un gas desde este punto de vista especificando:

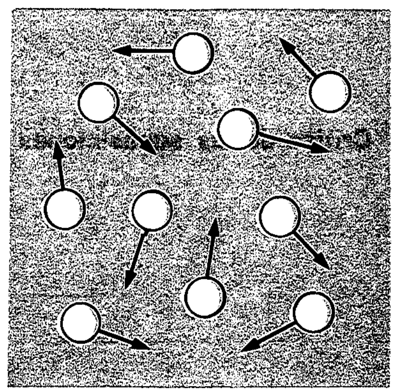
- Su **presión** P (en atmósferas).
- Su **temperatura absoluta** T (en °K, Kelvin).
- Su **composición,** en términos del número de moles n del gas de que se trate.
- Su **volumen** V.

De manera que se ha especificado su estado, una vez que se han dado los cuatro números positivos.

P, V, n, T.

Estado de un gas

Existe la necesidad de redondear esta descripción, pues en la práctica no todos los estados pueden ocurrir, sino sólo aquellos que satisfagan una cierta relación entre las cuatro variables **P, V, n, T,** que se conoce como **ecuación de estado** del gas en cuestión y que es propia del mismo. En particular, se dice que un gas es **ideal** o **perfecto** si tiene como ecuación de estado a:



$$\boxed{PV = nRT}$$

donde **R** es una constante universal.

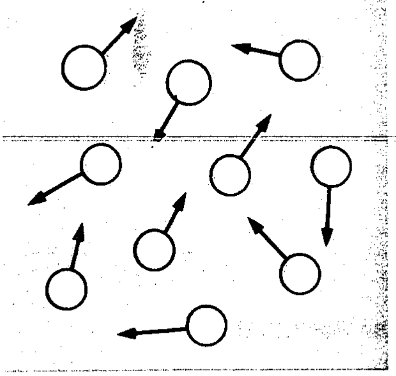
Para un gas ideal:

$$\boxed{\frac{n}{V} = \frac{P}{RT}}$$

Queda así resuelto el problema de conocer la densidad del gas a partir de mediciones de presión y temperatura, dato que luego el ingeniero usa para cuantificar el flujo de gas. Para un gas real (y todos lo son) no sirve el cálculo anterior; pero el problema también puede resolverse en términos de la correspondiente ecuación de estado. Es así como la termodinámica nos ayuda a determinar la cuantificación de un gas.

Una ecuación de estado para un gas sirve para conocer la densidad en términos de la presión y de la temperatura

Queda así planteada la necesidad de contar con buenas ecuaciones de estado para gases. Para entender más cabalmente el comportamiento de la materia y poder así dar solución a ésta y muchas otras cuestiones, los físicos construyen **modelos** de los diferentes sistemas, los cuales son idealizaciones en que, por ejemplo, los gases se suponen constituidos por gran número de



partículas (moléculas) que interactúan según leyes conocidas. De este régimen de interacción a nivel microscópico resultan propiedades observables macroscópicamente (presión, volumen, temperatura) al promediar de manera adecuada algunas variables microscópicas. La parte de la física que se ocupa de estas cuestiones se conoce como **mecánica estadística**, uno de cuyos propósitos es poder dar mejores ecuaciones de estado para gases.

El papel de la probabilidad

En este tipo de problemas es donde interviene la probabilidad, la cual nos dice cómo debemos promediar.

Concentrémonos en el siguiente problema de mecánica estadística: se tiene un sistema cerrado (es aquel que no intercambia ni materia ni energía con sus alrededores) constituido por **r** partículas, a cada una de las cuales se debe asignar un valor de la energía y sólo uno. Supongamos, además, que la energía sólo puede tomar un número finito de valores, digamos:

$$\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n.$$

Esta última suposición tiene como fin simplificar la discusión.

Crítica de las suposiciones

De acuerdo con la **mecánica clásica** (la usual, la que se basa en las **leyes de Newton**), la energía puede tomar en principio cualquier valor real; con esta suposición probablemente estamos siendo demasiado restrictivos. Sin embargo, para **partículas subatómicas** esta suposición sí es buena, siempre y cuando **n** (el número de **niveles de energía**) sea grande.

Igualmente tiene interés el caso en que **r** es un número grande (muchas partículas); así, a veces conviene considerar valores de **r** tan grandes como 6.023×10^{23}, el llamado **número de Avogadro.** ¿Lo recuerda de sus cursos de física?

El experimento que nos ocupará aquí, será el de obtener las diferentes configuraciones del sistema de partículas; por **configuración del sistema** entenderemos una asignación de valores de la energía para cada una de ellas. Aunque a primera vista resulte asombroso, será esencialmente de **contar** las diferentes configuraciones que puedan darse, que saldrán las propiedades termodinámicas del sistema, mediante el necesario paso de toma de promedios.

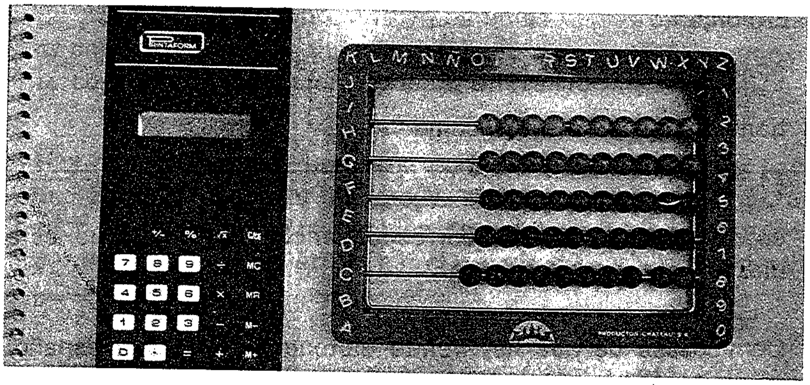
Análisis combinatorio

En este momento conviene revisar **el problema de contar,** con el que seguramente inició sus contactos con la matemática en la escuela primaria y que quizá, ya más formalmente, estudió en el Módulo 10 de la serie, llamado "La inducción en matemáticas".

En esta secuencia revisaremos brevemente los conceptos básicos del análisis combinatorio; conceptos que se tratan ampliamente en el Módulo antes citado.

Recuerde que el análisis combinatorio es el desarrollo de un modelo matemático que resulta del proceso de contar, proceso que la humanidad ha utilizado durante toda su historia.

Todos hemos visto a los niños contar con los dedos sus pertenencias (canicas, ranitas, piedrecitas, etc.). Se dice que hay cinco canicas en un montón si se puede hacer corresponder una y sólo una a cada dedo de la mano y recíprocamente. Se dice que hay cuatro si la **correspondencia biunívoca** de que hablamos se establece con todos menos uno de los dedos de la mano derecha, que hay seis si hay que usar un dedo de la mano izquierda además de todos los de la derecha, etc.



Motivados por esta manera de proceder, modelamos el proceso de contar en los siguientes términos:

Observe detenidamente los conceptos fundamentales del contar

Se dice que dos conjuntos **A** y **B** **tienen el mismo número de elementos** si existe una correspondencia biunívoca (es decir, una función biyectiva) de **A** en **B**. En este caso escribimos:

$$\text{núm.}\,\mathbf{A} = \text{núm.}\,\mathbf{B}$$

(léase: **A** y **B** tienen el mismo número de elementos).

Si $\mathbf{B} = \{1, \ldots, \mathbf{n}\}$, diremos que **B** tiene **n elementos,** y pondremos:

$$\text{núm.}\,\mathbf{B} = \mathbf{n}$$

para cualquier conjunto **A** que tenga tantos elementos como **B.**

Decimos que **A** es **finito** si es vacío o si núm. $\mathbf{A} = \mathbf{n}$ para algún entero positivo **n.**

Cuando se compara un conjunto **A** con otro del tipo de:

$$\{1, \ldots, \mathbf{n}\}$$

y se llega a:

$$\text{núm.}\,\mathbf{A} = \mathbf{n}$$

se dice que **se han contado los elementos de A** y que **hay n.**

¿Ya entendió?

Sigamos adelante.

Ejemplos de contar

1. El conjunto

   {Pedro, Juan, María}

   tiene tantos elementos como:

   $\{1, 2, 3\}$;

   es decir, tres. Dé una correspondencia biunívoca que establezca este hecho.

2. Convénzase de que hay veinte diptongos en idioma español, si no se admiten repeticiones de la misma vocal.

En el párrafo que precede al ejemplo anterior está comprendido todo lo que necesitamos saber para contar los elementos de cualquier conjunto finito; es decir, todo el análisis combinatorio. Sin embargo, mucho se facilitan las cosas si se aprende a usar de manera inteligente los siguientes **principios del contar,** que por supuesto son consecuencia de los conceptos básicos dados líneas arriba. Los conjuntos **A, B** y **C** que se mencionan a continuación son arbitrarios, sólo se supone de ellos que son finitos:

Estos son los principios básicos del contar

Transitividad.

Si núm. **A** = núm. **B** y núm. **B** = núm. **C,** entonces núm. **A** = núm. **C.**

Aditividad.

Si **A** y **B** son ajenos (es decir, si $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \phi$), entonces núm. $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ = núm. **A** + núm. **B.**

Multiplicatividad.

núm. $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ = (núm. **A**) (núm. **B**).

En lugar de demostrar la validez de estos tres principios (no es difícil, inténtelo o vea el Módulo antes mencionado) ilustraremos su empleo mediante los siguientes ejemplos:

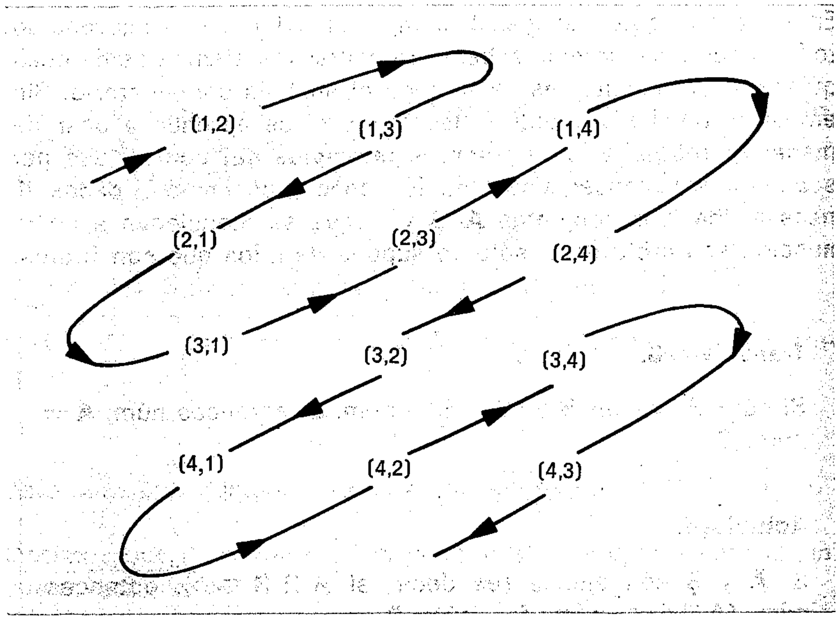
Ejemplos

1. Se tienen tres bolas blancas y dos bolas negras ¿cuántas hay en total? Redacte un análisis detallado que muestre claramente cómo se llega a una respuesta utilizando la aditividad.

2. Hay cuatro bolas en una urna numeradas 1, 2, 3, 4. Se saca una bola, se anota su número y, **sin regresarla a la urna,** se saca otra cuyo número también se anota. La pareja ordenada de números así obtenida es el resultado del experimento. ¿Cuántos resultados puede haber?

Primer método: a pie

Por enumeración directa, los posibles resultados son:



y fácilmente se ve que son doce en total. Por ejemplo, se pueden ordenar si se extiende la flecha curvada y así se establece la correspondencia con $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Los resultados obtenidos usando la multiplicatividad y la transitividad son los siguientes:

Segundo método: usando la multiplicatividad y la transitividad

Sean **A** y **B** los conjuntos formados por las posibles maneras de elegir la primera y la segunda bolas, respectivamente; entonces, núm. **A** $= 4$ núm. **B** $= 3$. Hay tantas maneras de elegir un resultado como elementos hay en $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$; es decir, núm. $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 4 \times 3 = 12$, luego entonces, hay doce resultados.

Haciendo uso de otro principio básico como es la aditividad tenemos:

Tercer método: usando además la aditividad

Sean:

- **A** el conjunto de maneras de escoger dos bolas sin que se repitan.
- **B** el conjunto de maneras de elegir dos bolas repetidas.
- **C** el conjunto de maneras en que se puede elegir una sola bola.

Vemos fácilmente que en **B** hay tantos elementos como bolas en la urna; es decir, cuatro. Y lo mismo en **C.** Por otro lado, en **A U B** hay tantos elementos como maneras tenemos de elegir dos bolas, repetidas o no, por lo que:

$$\text{núm. } (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \text{núm. } (\mathbf{C} \times \mathbf{C}) = 4 \times 4 = 16.$$

Basta observar que **A** y **B** son ajenos para tener que:

$$\begin{aligned} \text{núm. } \mathbf{A} &= \text{núm. } (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) - \text{núm. } \mathbf{B} \\ &= 16 - 4 = 12 \end{aligned}$$

Fácilmente se generaliza la multiplicatividad a un número arbitrario de factores, dando lugar al llamado **principio fundamental del análisis combinatorio,** que dice que:

Principio fundamental del análisis combinatorio

$$\text{núm. } (\mathbf{A}_1 \times \ldots \times \mathbf{An}) = (\text{núm. } \mathbf{A}_1) \ldots (\text{núm. } \mathbf{An})$$

y, en particular, que:

$$\text{núm. } (\mathbf{A}^n) = (\text{núm. } \mathbf{A})^n$$

Aquí:

- **n** es un entero positivo.

En tanto que:

- $\mathbf{A}, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ son conjuntos finitos.
- $\mathbf{A}^n$ denota el producto cartesiano.

$$\underbrace{\mathbf{A} \times \ldots \times \mathbf{A}}_{\mathbf{n} \text{ veces.}}$$

De esta manera se demuestra el principio fundamental del análisis combinatorio por inducción sobre **n.**

¡Inténtelo!

Apliquemos estos principios al problema de contar las configuraciones del sistema de partículas que nos está sirviendo de motivación.

Sea Ω el conjunto formado por las diferentes configuraciones del sistema de partículas, a las que a su vez denotaremos genéricamente por medio de la letra griega ω. Se puede representar cada configuración mediante una **r**-ada ordenada.

$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r),$$

donde:

- $\mathbf{e}_1$ es la energía de la partícula 1.
- $\mathbf{e}_2$ la de la partícula 2, etc., y
- $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ son, desde luego, elementos del conjunto.

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n\}$$

En otras palabras,

Espacio de configuraciones

$$\boxed{\Omega = \mathbf{E}^r}$$

y dado que:

$$\text{núm. } \mathbf{E} = \mathbf{n}$$

del principio fundamental del análisis combinatorio se tiene que:

Número de configuraciones

$$\boxed{\text{núm. } \Omega = \mathbf{n}^r}$$

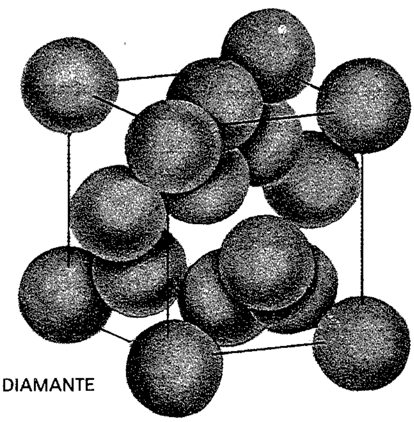
La **estadística de Maxwell-Boltzmann** asigna igual probabilidad a las distintas configuraciones. Cabe hacer notar que ésta es una hipótesis bastante fuerte acerca del comportamiento de la naturaleza, cuya única justificación estará en la bondad del modelo al que eventualmente dé lugar. Llamemos $\mathbf{p}_{MB}$ a la probabilidad que según esta hipótesis tienen cada una de las distintas configuraciones. Dado que la suma total de las probabilidades debe ser 1 (uno), necesariamente:

$$\underbrace{p_{MB} + \ldots + p_{MB}}_{n^r \text{ veces}} = 1$$

y entonces:

$$\boxed{p_{MB} = \frac{1}{n^r}}$$

es la **probabilidad de cada una de las configuraciones.**



MOLECULA DE DIAMANTE

Esta asignación de probabilidades nos permite promediar cantidades de interés. Por ejemplo, la energía de cada partícula o la de todo el sistema de partículas;-al valor promedio de la energía de una partícula este modelo lo denotaremos como:

El valor promedio para este modelo es

$$\boxed{\langle U \rangle_{MB}}$$

Para ello, sea $U_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la función que a cada configuración ω le asocia la energía de la primera partícula según dicha configuración; es decir, si:

El valor promedio según este modelo se obtiene

$$\omega = (e_1, \ldots, e_r),$$

entonces:

$$\mathbf{U}_1(\omega) = \mathbf{e}_1.$$

Análogamente, defínanse $\mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_n$.

El valor promedio de la energía de la partícula **i** (es decir, de $\mathbf{U}_i$) de acuerdo con este modelo se obtiene:

Sumando los diferentes valores que esta energía puede tomar por la probabilidad con la que los toma.

Es decir:

$\mathbf{E}_1 \times$ probabilidad de que la partícula **i** tenga energía $\mathbf{E}_1$.

$+ \mathbf{E}_2 \times$ probabilidad de que la partícula **i** tenga energía $\mathbf{E}_2$.

$+ \ldots$

Ahora bien, las configuraciones según las cuales la partícula **i** tiene energía $\mathbf{E}_1$ son todas de la forma:

$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{E}_1, \mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_r)$$

y hay tantas de ellas como maneras haya de elegir la energía para cada una de las $\mathbf{r} - 1$ partículas restantes, es decir, $\mathbf{n}^{r-1}$.

¿Por qué?

Dado que cada una de las partículas tiene una probabilidad $\mathbf{n}^{-r}$ de ocurrir, se tiene que la **probabilidad de que la partícula** i **tenga energía** E_1 es:

$$\mathbf{n}^{r-1} \times \frac{1}{\mathbf{n}^r} = \frac{1}{\mathbf{n}}.$$

Análogamente, se tiene que la **probabilidad de que la partícula** i **tenga energía** $\mathbf{E}_j$ es:

$$\frac{1}{\mathbf{n}}$$

cualquiera que sea el valor de j.

Así pues, el valor promedio de la energía de la partícula i es:

$$E_1 \frac{1}{n} + \ldots + E_n \frac{1}{n}$$

$$= \frac{E_1 + \ldots + E_n}{n}$$

es decir,

$$\langle U \rangle_{MB} = \bar{E}.$$

Aquí, $\bar{E}$ denota la media aritmética de $E_1, \ldots, E_n$.

Según el modelo de Maxwell-Boltzmann, todas las partículas del sistema tienen en promedio la misma energía, a saber la media aritmética de los valores posibles de la energía.

Conclusión: la energía se reparte equitativamente

Análogamente, si U_T denota la energía total del sistema:

$$\langle U_T \rangle_{MB} = r\bar{E};$$

De la misma manera, según este modelo, podemos promediar otras cantidades de interés para obtener sus valores observables (macroscópicos).

Sin embargo, **no hay ningún sistema conocido de partículas que se comporten de acuerdo con el modelo de Maxwell-Boltzmann.**

Hay dos modelos alternativos para esta misma situación que sí representan el comportamiento de algunas partículas reales y subyacente a ambos se encuentran las siguientes consideraciones:

Dos configuraciones que tengan el mismo número de partículas con cada valor de la energía son equivalentes, en el sentido de que no se puede hacer distinción entre ellas.

Consideración: las partículas son indistinguibles

Precisando, dos configuraciones ω', ω'' son **indistinguibles** si, en ambas:

> r_1 **de las** r **partículas tienen energía** E_1, r_2 **de las** r **partículas tienen energía** E_2**, etc.**

Definición de configuración distinguible

Donde:

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r \quad (*)$$

Sea:

$$\boxed{A_{r_1, \ldots, r_n} = \{\omega \in \Omega : \text{se cumple } (*)\}}$$

Cabe hacer notar que las configuraciones en $A_{r_1, \ldots, r_n}$ son in distinguibles entre sí y que ninguna de sus configuraciones es indistinguible de otra que no esté en dicho conjunto. Cada $A_{r_1, \ldots, r_n}$ se llamará una **configuración distinguible** y hay una para cada elección de enteros no negativos $r_1, \ldots, r_n$ tales que:

$$r_1 + \ldots + r_n = r$$

¿Cuántas configuraciones distinguibles hay?

Veamos a continuación.

Sea Σ el conjunto de todas las configuraciones distinguibles.

CODIGO MORSE

a	• —	o	— — —	1	• — — — —
b	— • • •	p	• — — •	2	• • — — —
c	— • — •	q	— — • —	3	• • • — —
ch	— — — —	r	• — •	4	• • • • —
d	— • •	s	• • •	5	• • • • •
e	•	t	—	6	— • • • •
f	• • — •	u	• • —	7	— — • • •
g	— —	v	• • • —	8	— — — • •
h	• • • •	w	• — —	9	— — — — •
i	• •	x	— • • —	0	— — — — —
j	• — — —	y	— • — —	principio de transmisión	— • — • —
k	— • —	z	— — • •	final de transmisión	• — • — •
l	• — • •	punto	• — • — • —		
m	— —	error	• • • • • • • •		
n	— •				
ñ	— — • — —				

Para cada una de ellas constituiremos una palabra en código Morse como sigue: a $\mathbf{A}_{r_1}, \ldots, r_n$ le asignamos la palabra que tiene $\mathbf{r}_1$ puntos, luego una raya (para separar), luego $\mathbf{r}_2$ puntos, luego una raya, etc., hasta terminar en $\mathbf{r}_n$ puntos. Así, por ejemplo, si $\mathbf{n} = 3, \mathbf{r} = 4, \mathbf{r}_1 = 2, \mathbf{r}_2 = 1, \mathbf{r}_3 = 1$, a $\mathbf{A}_{2,1,1}$ le asociamos la palabra . . —. — . Note que cada palabra así construida tiene $\mathbf{r}$ puntos, divididos en $\mathbf{n}$ grupos separados por rayas, de las que hay entonces $\mathbf{n} - 1$; así pues, las palabras en cuestión tienen todas $\mathbf{n} + \mathbf{r} - 1$ símbolos entre puntos y rayas.

Note que hay tantos elementos en Σ como palabras construidas según este procedimiento y que hay tantas de éstas como maneras haya de elegir $\mathbf{r}$ lugares para los puntos de los $\mathbf{n} + \mathbf{r} - 1$ lugares que tiene cada una; a su vez, hay tantas maneras de hacer esta elección como subconjuntos de $\mathbf{r}$ elementos (lugares) se puedan extraer de un conjunto de $\mathbf{n} + \mathbf{r} - 1$ elementos (lugares).

Si usamos el símbolo:

$$\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{p}}$$

para denotar el número de subconjuntos de $\mathbf{p}$ elementos que pueden extraerse de un conjunto de $\mathbf{m}$ elementos $(0 \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{m}, \mathbf{m} = 0, 1, 2, \ldots)$; entonces:

$$\text{núm.}\,\Sigma = \binom{\mathbf{n} + \mathbf{r} - 1}{\mathbf{r}}$$

¿Cómo se calcula $\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{p}}$**?**

Conviene considerar como ejemplo un lago con $\mathbf{m}$ peces, de los cuales queremos pescar $\mathbf{p}$ para llevarlos a casa.

Supongamos que se pueden distinguir los peces unos de otros:

¿De cuántas maneras se puede hacer esta operación?

El primer pez puede ser cualquiera de los $\mathbf{m}$ en el lago, el segundo cualquiera de los $\mathbf{m} - 1$ restantes, etc., hasta que al pescar el último ya sólo queden $\mathbf{m} - (\mathbf{p} - 1) = \mathbf{m} - \mathbf{p} + 1$ peces en el lago, cualquiera de los cuales puede ser el último que pesquemos. Así pues, podemos elegir los $\mathbf{p}$ peces de:

$$\mathbf{m}(\mathbf{m} - 1) \ldots (\mathbf{m} - \mathbf{p} + 1) \text{ maneras.}$$

¿Cuál de los principios básicos del contar hemos usado en este cálculo?

En particular, podemos decidir pescar **todos** los peces del lago ($\mathbf{p} = \mathbf{m}$) y esto lo podemos hacer de:

$$\mathbf{m}(\mathbf{m} - 1) \ldots 1 \text{ maneras.}$$

Defínanse los símbolos $(\mathbf{m})_p$ y $\mathbf{m}!$ mediante:

$$(\mathbf{m})_p = \mathbf{m}(\mathbf{m} - 1) \ldots (\mathbf{m} - \mathbf{p} + 1)$$

$$\mathbf{m}! = \mathbf{m}(\mathbf{m} - 1) \ldots 1;$$

en donde:

$(m)_p$ **es el número de muestras de longitud** p **tomadas sin reemplazo de una población de tamaño** m **(y no necesariamente de peces), suponiendo que sus elementos se pueden distinguir entre sí.**

Cuando $\mathbf{m} = \mathbf{p}$, una tal muestra no es otra cosa que un ordenamiento de los miembros de la población; a veces también se le llama una **permutación.** Así pues, **m !** es el número de permutaciones de un conjunto con **m** elementos y se lee **m factorial.**

Note que:

$$\mathbf{m}! = (\mathbf{m})_m$$

$$(\mathbf{m})_p = \frac{\mathbf{m}!}{(\mathbf{m} - \mathbf{p})!}$$

Problema Convénzase de que las últimas dos fórmulas son correctas.

Por otro lado, la accion de elegir una muestra de longitud **p** sin reemplazo y de una población de tamaño **m,** la podemos realizar en dos pasos:

1. Se elige un subconjunto de tamaño **p,** y luego.
2. Se elige una permutación de los elementos del subconjunto elegido.

Dado que la primera acción se puede realizar de $\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{p}}$ maneras y la segunda de **p !** maneras, la acción conjunta se puede realizar de:

$$\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{p}} \mathbf{p}!$$

Entonces tenemos que:

$$(m)_p = \binom{m}{p} p\,!$$

y por lo tanto,

$$\boxed{\binom{m}{p} = \frac{m\,!}{p\,!\,(m-p)\,!}}$$

Fórmula del coeficiente binomial

a. ¿Cómo se usó el principio fundamental del análisis combinatorio en el razonamiento anterior?

b. ¿Ya está convencido de la veracidad de la última fórmula?

c. ¿Es cierto que $\binom{m}{p} = \binom{m}{m-p}$?

Conteste estas preguntas

Los símbolos $\binom{m}{p}$ se llaman también **coeficientes binomiales,** ya que aparecen en el llamado **teorema del binomio.**

Aclaración

Ahora ya sabemos cuántas configuraciones distinguibles hay, ¿no es cierto?

Recordatorio

La estadística de Bose-Einstein dice que cada configuración distinguible se da con la misma probabilidad, p_{BE}. Como hay:

$$\binom{n+r-1}{r}$$

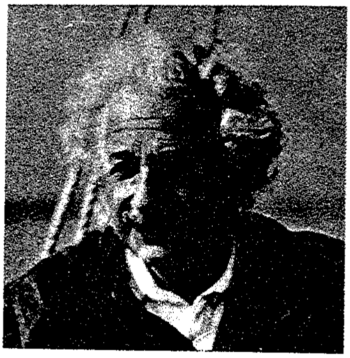
de ellas, debe tenerse que:

$$\binom{n+r-1}{r} p_{BE} = 1.$$

Y por lo tanto:

$$p_{BE} = \frac{1}{\binom{n+r-1}{r}}$$

es la probabilidad de que se dé cualquiera de las configuraciones distinguibles.



Usted verá en su Módulo 6 de Física Moderna que hay partículas que se comportan según este modelo probabilístico, a las cuales se les conoce genéricamente como bosones. Ejemplos de bosones son:

- Los fotones (los "paquetes elementales" en los que viene la luz).
- Los núcleos y los átomos con un número par de partículas elementales.

Un tercer modelo de comportamiento de los sistemas de partículas es el de los **fermiones,** llamados así por corresponder a las predicciones de la **estadística de Fermi-Dirac,** modelo probabilístico que a continuación construiremos.

Por cierto, ejemplos de fermiones son:

- Los electrones.
- Los protones.
- Los neutrones.

El modelo de Fermi-Dirac prohibe que se manifiesten configuraciones distinguibles con más de una partícula en el mismo nivel de energía.

En otras palabras, Fermi-Dirac solamente considera $\mathbf{A}_{r_1, \ldots, r_n}$ para soluciones de:

$$r_1 + \ldots + r_n = r$$

en las que $r_1, \ldots, r_n \in \{0, 1\}$. Nótese que este requisito impone la restricción adicional:

$$r \leq n.$$

¿Por qué?

Siempre que se cumplan estas condiciones se dirá que la configuración distinguible correspondiente es **FD.** Hay tantas de estas configuraciones como maneras haya de seleccionar **r** lugares de los **n** para poner los unos, poniendo **ceros** en los $n - r$ lugares restantes; en otras palabras, **hay** $\binom{n}{r}$ **configuraciones distinguibles FD.**

¿Es cierto?

Cada una de las configuraciones tendrá la misma probabilidad (p_{FD}), en tanto que las configuraciones distinguibles restantes tendrán probabilidad **cero** (es decir, **no contarán**). Así pues,

$$p_{FD} = \frac{1}{\binom{n}{r}}.$$

La diferencia: en el modelo de Fermi-Dirac, las configuraciones distinguibles en las que más de una partícula ocupa el mismo nivel de energía, resultan inaceptables; las restantes sí se consideran y son equiprobables. En cambio, en el modelo de Bose-Einstein **todas** las configuraciones distinguibles son aceptables, y se dan con la misma probabilidad.

¿En qué se distinguen los fermiones de los bosones?

Resultaría adecuado saber qué probabilidad asigna el modelo de Maxwell-Boltzmann a cada una de las configuraciones distinguibles para poder comparar los tres modelos sobre una misma base.

La probabilidad de $\mathbf{A}_{r_1 \ldots r_n}$ según el modelo de Maxwell-Boltzmann se obtiene:

Según el modelo de Maxwell-Boltzmann, la probabilidad de $A_{r_1 \ldots r_n}$ se obtiene:

Sumando las probabilidades de cada una de las configuraciones que la constituyen (n^{-r}); es decir:

$$\underbrace{n^{-r} + \ldots + n^{-r}}_{\textbf{núm. } A_{r_1 \ldots r_n} \textbf{ veces}}$$

$$= n^{-r} \textbf{ núm. } A_{r_1 \ldots r_n}.$$

¿Cuántos elementos tiene $\mathbf{A}_{r_1 \ldots r_n}$? Claramente, tiene tantos elementos como maneras haya de partir el conjunto de **r** partículas en **n** subconjuntos, uno con r_1 partículas, otro con r_2 partículas, etc.; con tal de que:

$$r_1 + \ldots + r_n = r$$

Denotemos este número con:

$$\binom{r}{r_1 \dots r_n}$$

A este último resultado se le denomina **coeficiente multinomial.**

Procedimiento para calcular el coeficiente multinomial

Para calcularlo se puede proceder como sigue:

- Sea **A** el conjunto de maneras de lograr la partición sugerida.
- Sea $\mathbf{A}_1$ el conjunto de maneras de partir el conjunto original en dos grupos, uno con r_1 partículas, el otro con $r - r_1$. Hay $\binom{r}{r_1}$ maneras de hacer esto.
- Sea $\mathbf{A}_2$ el conjunto de maneras de partir el grupo de las $r - r_1$ partículas en dos, uno con r_2 y el otro con las $r - r_1 - r_2$, etc. Hay $\binom{r - r_1}{r_2}$ maneras en $\mathbf{A}_2$.
- Finalmente habrá que considerar el conjunto $\mathbf{A}_n$ de maneras de extraer r_n partículas del conjunto que queda después de los pasos anteriores, el cual tiene $r - r_1 \dots - r_{n-1} = r_n$ partículas, operación que puede realizarse de una manera solamente.

Es claro que:

$$\text{núm. } \mathbf{A} = \text{núm. } (\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_n)$$

y entonces, por el principio fundamental,

$$\text{núm. } \mathbf{A} = \frac{r\,!}{r_1\,!\,\cancel{(r - r_1)}\,!} \; \frac{\cancel{(r - r_1)\,!}}{(r - \cancel{r_1 - r_2)}\,!\; r_2\,!} \dots 1$$

$$= \frac{r\,!}{r_1\,! \dots r_n\,!};$$

por lo cual,

Coeficientes multinomiales

$$\boxed{\binom{r}{r_1 \dots r_n} = \frac{r\,!}{r_1\,! \dots r_n\,!}}$$

Así pues, en el modelo de Maxwell-Boltzmann la configuración distinguible $A_{r_1 \ldots r_n}$ se da con probabilidad:

$$\frac{r!}{r_1! \ldots r_n!} n^{-r}.$$

Con el fin de comparar los tres modelos podemos formar la siguiente tabla:

Tabla comparativa de los tres modelos

Modelo	$A_{r_1 \ldots r_n}$ **tiene probabilidad**	**Observaciones**
MB	$\frac{r!}{r_1! \ldots r_n!} n^{-r}$	Asigna probabilidad a las configuraciones
BE	$\binom{n+r-1}{r}^{-1}$	Equiprobable
FD	$\binom{n}{r}^{-1}$ si $A_{r_1 \ldots r_n}$ es FD 0 si no	Se requiere que $r \leq n$

Lo que se puede hacer una vez que se conocen las probabilidades de las configuraciones distinguibles

En la secuencia 4 de la siguiente unidad veremos cómo nos podemos servir de modelos de este tipo para obtener ecuaciones de estado para gases (después de todo, los gases son sistemas de partículas, ¿no?); en particular, en la secuencia mencionada obtendremos la ecuación de los gases perfectos por medio de consideraciones de este tipo.

Por ahora, quisiéramos recapitular, haciendo notar algunas características comunes de los modelos que hemos construido.

Características comunes de los modelos construidos

1. En cada uno de los modelos antes señalados hay un conjunto finito, cuyos elementos pueden identificarse con los diferentes resultados de un experimento que consiste en observar la energía de cada partícula.

En **MB** se anota la energía de cada partícula, en tanto que **BE** y **FD** requieren únicamente del dato de cuántas partículas hay en cada nivel de energía.

2. Cada uno de los resultados se da con igual probabilidad en los primeros dos modelos, no así en el tercero. Sin embargo, en cada uno de ellos las probabilidades de todos los resultados suman uno.

Estas consideraciones nos llevan a abstraer un poco y a dar el siguiente concepto, el cual tiene una aplicación bastante extensa y de ninguna manera es específica para los siguientes tres ejemplos:

Modelo de un experimento con un número finito de resultados

Un **modelo probabilístico discreto** consta de:

a. Un conjunto finito Ω, cuyos elementos se llaman **resultados** (y de hecho representan los resultados del experimento que se esté modelando).

b. Una eneada ordenada de números no negativos

$$p_1, \ldots, p_n$$

donde $n =$ núm. Ω y tales que:

$$p_1 + \ldots + p_n = 1$$

Estos números serán las **probabilidades** con que se den los diferentes resultados del experimento.

c. La probabilidad de que el experimento arroje un resultado de los comprendidos en un conjunto dado (también llamado **evento**) se obtiene sumando las probabilidades con que se dan cada uno de los diferentes resultados de que consta el evento en cuestión.

¿Está clara la construcción de los modelos?

El modelo laplaciano

En particular, se dice que el modelo es **equiprobable** si:

$$p_1 = \ldots = p_n = p$$

De b. resulta que necesariamente:

$$p = \frac{1}{\text{núm. } \Omega}$$

y de c. se deduce que:

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{\text{núm. } \mathbf{A}}{\text{núm. } \Omega}$$

para todo evento $\mathbf{A} \subset \Omega$ en el caso equiprobable.

Considerando la hipótesis equiprobable, la probabilidad de un evento se obtiene dividiendo el número de resultados favorables a la realización del evento entre el número total de resultados, de tal manera que el problema de calcular probabilidades se resuelve **contando.**

Ejemplo

Un modelo para el ejemplo de la ruleta, citado al principio de esta secuencia, es:

$$\Omega = \{\text{rojo, verde, azul}\}$$

$$\mathbf{p}_{\text{rojo}} = \frac{1}{2}, \mathbf{p}_{\text{verde}} = \frac{1}{4}, \mathbf{p}_{\text{azul}} = \frac{1}{4}.$$

Ejemplo

El modelo de Fermi-Dirac se puede dar en términos del conjunto Σ (un resultado es una configuración distinguible), y los

$\binom{\mathbf{n}+\mathbf{r}-1}{\mathbf{r}}$ números no negativos

$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}}^{-1}$ para las configuraciones distinguibles **FD**

0 para las restantes.

En la siguiente secuencia revisaremos los modelos probabilísticos desde una perspectiva más general.

EJERCICIOS DE APLICACION

N.B. Estos ejercicios han sido preparados para que usted aplique lo que aprendió. Realícelos, le ayudarán a reafirmar sus conocimientos. Si tiene alguna duda, consulte a su asesor.

La manera de comprobar la exactitud de sus respuestas es comparándolas con el contenido incluido en el texto y/o comentándolas con su asesor.

1. Investigue en la bibliografía sugerida o en la que usted considere conveniente, otros casos de **interacción ciencia-tecnología y economía** diferentes del mencionado en esta secuencia. Relate cómo se resolvieron mediante la investigación básica.

2. Redacte un breve ensayo donde diga cómo se puede llegar a resolver problemas tecnológicos de gran resonancia económica en el México actual mediante la investigación básica. Se aconseja que se apoye en el ejemplo **mecánica estadística — ecuaciones de estado para gases — cuantificación del flujo de gas en un ducto** que se da en el texto.

3. Explique brevemente qué significa el concepto "equiprobabilidad".

4. Resuelva el siguiente problema:

   Cada página de un libro contiene 3000 caracteres impresos (letras, signos ortográficos, espacios libres), de los cuales algunos son erróneos. El libro tiene 500 páginas y 50 errores de imprenta. Convénzase de que la probabilidad de que haya $\mathbf{n_1}$ errores en la primera página, $\mathbf{n_2}$ en la segunda, etc., es:

$$\frac{\binom{3000}{\mathbf{n_1}}\binom{3000}{\mathbf{n_2}}\cdots\binom{3000}{\mathbf{n_{500}}}}{\binom{1{,}500.000}{50}}.$$

N.B. Después de haber realizado los ejercicios, usted podrá afirmar su aprendizaje. Lo que no haya sido muy claro o no haya podido captar perfectamente, coméntelo con su asesor.

SUGERENCIAS DE ESTUDIO

Para ampliar su información se sugiere que:

- Consulte el siguiente libro:

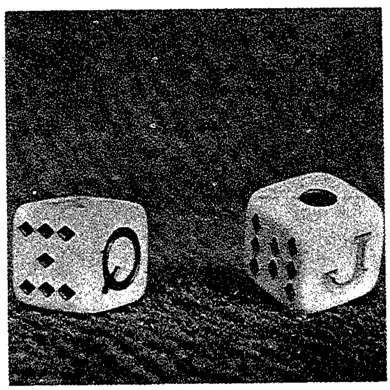
  FELLER, WILLIAM, "**An Introduction to Probability Theory and its Applications**" Vol. 1, Edit. John Wiley & Sons, New York, 1968, cap. II y III.

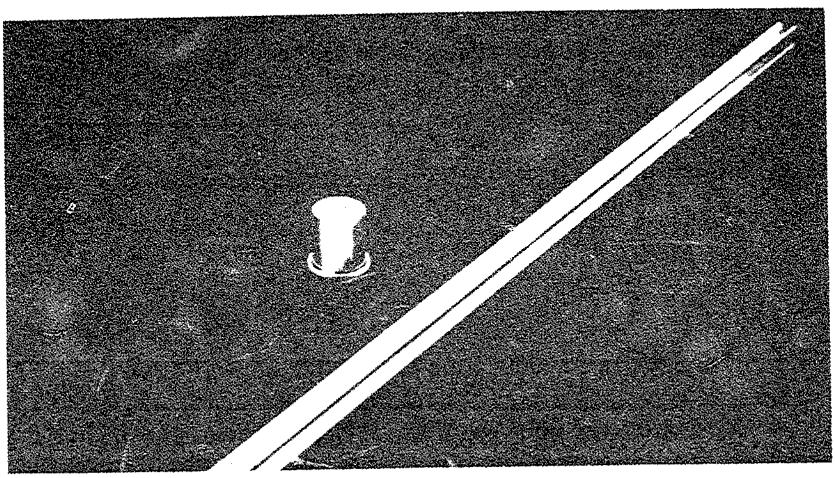
Secuencia 3

Algebra de eventos

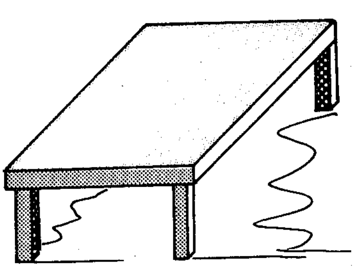
Ideas preliminares

En la secuencia anterior construimos un modelo matemático para los hechos en los que interviene el azar (el **modelo probabilístico discreto**), el cual resulta aplicable para una gran variedad de situaciones, como vimos mediante los diferentes ejemplos que manejamos. En esta secuencia refinaremos este modelo, de tal manera que lo podamos utilizar para representar otro tipo de situaciones; al final, el resultado será un modelo más general (el **espacio probabilístico**) y cuyas consecuencias van a constituir la materia de estudio de la probabilidad.



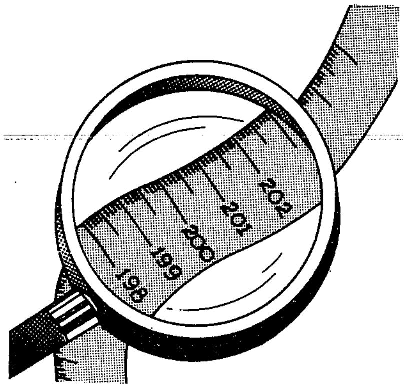


Metro y kilogramo patrón en la oficina de estándares en USA.



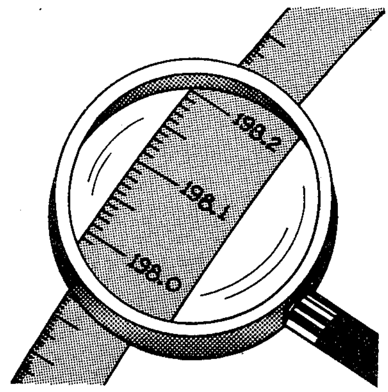
Una limitación del modelo discreto, que quisiera eliminarse, es que únicamente sirve para describir experimentos con un número finito de resultados posibles. Esta intención se debe, por supuesto, al hecho de que en algunos casos no se puede decir *a priori* que sólo un número finito de resultados se pueden obtener. Por ejemplo, si se trata de medir la longitud de una mesa con una cinta de medir que presenta un cierto grado de elasticidad (y todas las cintas son más o mènos elásticas), los resultados de mediciones sucesivas nunca darán el mismo valor y, de hecho, para una mesa dada puede resultar cualquier valor entre 198 cm y 202 cm, por decir algo.

Reflexione.



¿Cuál diría usted que es la longitud de la mesa, si se viera forzado a dar un valor?

Este es un caso en que resulta necesario tomar una infinidad de valores para los resultados de este experimento, por lo menos en principio. Por supuesto que en la práctica y para las cintas de medir que normalmente se usan, uno no distingue entre resultados que difieren en menos de un milímetro, así que las mediciones que se reportarán en las diferentes repeticiones del experimento, serán algunos de los 41 números que componen la siguiente lista:

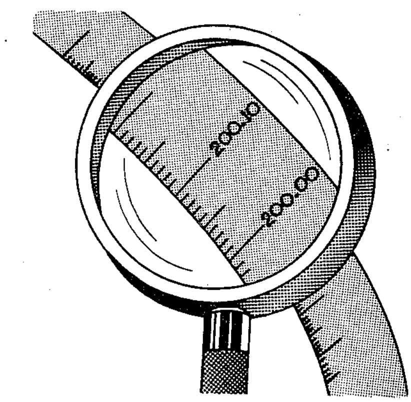


198.0, 198.1, 198.2, . . . , 201.8, 201.9, 202.0, cm.

En este caso hemos agrupado los datos tal y como se recomienda en la secuencia 2 de la unidad 2 del Módulo 1 de esta serie; por ello, la precisión de nuestras mediciones nos permite afirmar solamente que:

- La longitud medida está entre 198.0 y 198.1 cm
- La longitud medida está entre 198.1 y 198.2 cm , etcétera.

No tiene entonces sentido que nos empeñemos en hablar sino de eventos como los anteriores y combinaciones de ellos tales como:



- La longitud medida está entre 198.7 y 199.8 cm

y otros por el estilo; en tanto que eventos tales como:

- La longitud medida es de 201.18 cm
- La longitud medida está entre 200.03 y 200.07 cm

carecen de sentido, pues nunca se podrán observar dada la poca precisión de nuestra cinta de medir.

El conocimiento proviene de la experiencia

De acuerdo con el enfoque empirista mencionado en la unidad 1 del Módulo anterior, tiene sentido preguntarse por la probabilidad de eventos cuya ocurrencia podemos detectar, pero no tanto de los eventos no observables. Pero... ¿cuáles eventos son observables y cuáles no?. Indudablemente, la respuesta a esta interrogante dependerá más que nada de las condiciones de la experimentación.

Así pues, nos hacemos preguntas tales como:

¿Con qué probabilidad resulta un valor para la longitud de la mesa comprendido entre 198.1 y 198.2 cm ?, mas no preguntas

¿Cómo se puede calcular la frecuencia relativa de este evento en una serie de repeticiones del mismo experimento de medición?

como:

¿Qué probabilidad hay de que la longitud de la mesa esté entre 200.03 y 200.07 cm?

Ahora bien, queremos construir un modelo que sirva para describir experimentos con un número de resultados que no es necesariamente finito y que sea lo suficientemente flexible como para que nos permita tomar en cuenta la limitada precisión de nuestros instrumentos de medición.

Para ello, será conveniente que atendamos a los **orígenes empíricos de los hechos** que estamos tratando de modelar y que no perdamos de vista la lógica, ya que ésta nos permite manejar las proposiciones con que describimos los hechos empíricos en cuestión.

Por simplicidad, supongamos que el experimento que nos interesa consiste en lanzar tres veces la misma moneda y observar la cara que salga en cada uno de los tres volados.

Efectuamos el experimento y observamos eventos tales como:

a. Primero cayó un sol, luego un águila y finalmente otro sol.

b. Cayeron tres águilas.

c. Cayeron un águila y dos soles.

d. Cayó un sol la primera vez, luego dos águilas en sucesión.

etc.

Conviene traducir situaciones reales al lenguaje matemático

Por lo tanto, tenemos ya una serie de frases que recogen los resultados de nuestras observaciones. Esta colección de frases constituye ya un modelo del experimento, pero no uno que podamos manipular fácilmente; por lo tanto, es necesario **traducir** dicho modelo al lenguaje matemático, para obtener así otro modelo más manejable, llamado **modelo matemático.**

Para ello, comenzamos por seleccionar símbolos que nos representen las particularidades del fenómeno que nos ocupa, a saber:

a: águila.

s: sol.

En términos de estos símbolos, el resultado registrado en **a** se puede representar mediante el símbolo:

sas

sol, águila, sol

y el que se registra en **b** por:

aaa.

tres águilas al hilo

Hay que ser más cuidadosos al representar la frase **c** e incluir todas las posibilidades que llevan a que el evento correspondiente se realice, como son que el águila aparezca en la primera tirada, en la segunda o en la tercera. Luego entonces, lo representamos mediante el conjunto de símbolos:

ass, sas, ssa

Cae sólo un águila

y así sucesivamente. Nos damos cuenta de que hay dos clases de eventos:

- Aquellos que hemos representado mediante una sola terna de símbolos para águila y sol.
- Aquellos otros para los cuales hemos necesitado más de una de dichas ternas, como es el caso de **c.**

A los primeros les llamaremos **eventos elementales** y a los segundos **eventos descomponibles.** En otras palabras, hemos representado los diferentes resultados mediante ternas como **aaa, asa,** etc., y los eventos observados mediante conjunto de ternas de este tipo, conjuntos tales como:

{**aaa, asa, sas**}

{**sss**}, etc.

Abusando un poco de los términos, de aquí en adelante resultado y evento denotarán tanto a las nociones empíricas correspondientes como a sus representantes matemáticos; así pues, **aaa, asa, ssa,** etc., son resultados en tanto que {**asa, aaa**}, {**sss**}, etc., son eventos en el experimento consistente en jugar tres volados al hilo.

A menudo se usan términos con más de un significado: el contexto dice cuál es válido

Se dirá que un evento es **elemental** si consta de un sólo resultado; si tiene más de un elemento se dirá que es **descomponible.** Por ejemplo,

{**asa, aaa, sas**}

se puede descomponer como unión de eventos elementales, a saber:

$$\{\mathbf{asa}\} \cup \{\mathbf{aaa}\} \cup \{\mathbf{sas}\}.$$

No hay más resultados que éstos al lanzar tres volados al hilo

Cabe notar que los únicos resultados que pueden ocurrir son:

aaa, saa, asa, aas,

ass, sas, ssa, sss;

estos resultados constituyen un **conjunto,** mismo que denotamos mediante la letra griega Ω y llamamos **espacio de resultados.** Observe que los eventos son subconjuntos del espacio de resultados, en tanto que los resultados son elementos de dicho conjunto.

Resumiendo

Se construye un conjunto, cuyos elementos son los diferentes resultados del experimento. Después, los eventos (o, más bien, las proposiciones mediante las cuales se les denota) se representan mediante subconjuntos del espacio de resultados.

¿Seguro que ya entendió?

Al representar proposiciones mediante conjuntos de la manera en que lo hemos hecho líneas arriba, nos damos cuenta de que la proposición:

Esto no puede ocurrir

"cae sólo un águila y sólo un sol"

expresa un evento obviamente imposible en el contexto de este experimento, pues debe haber tres caras anotadas en cada resultado y no sólo dos. Otro evento que vamos a considerar imposible es el representado mediante la proposición:

Ni esto

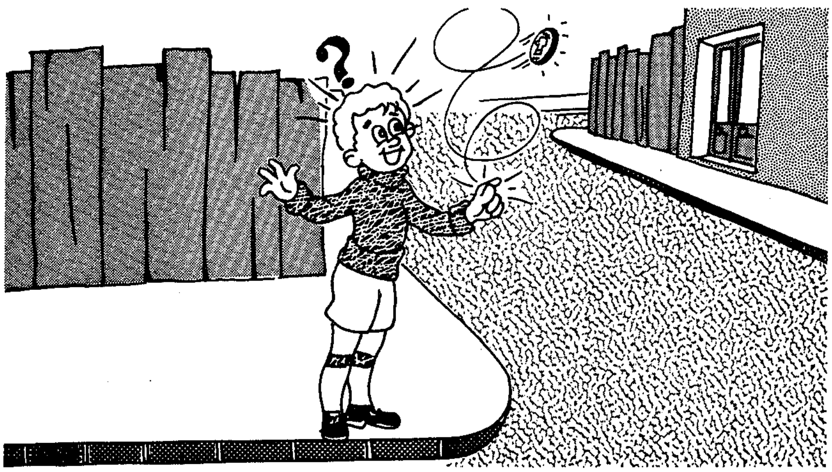
La moneda cae de canto

así como el dado por:

Ni esto

La moneda se va rodando hasta que se pierde.

A estos eventos, así como a otros que también clasificamos como imposibles, los vamos a representar mediante el conjunto vacío ϕ, al cual también llamaremos **evento imposible.**



En ningún momento hemos querido decir que sea imposible que la moneda caiga de canto o que ruede hasta que se pierda de vista o, aún, que desaparezca en el aire, por más que esta última posibilidad sí se antoja más remota según nuestra experiencia. Lo que debemos entender es que al precisar los conceptos en el lenguaje matemático representamos a todos estos eventos mediante el conjunto vacío ϕ. Esto, por supuesto, no es sino otra manera de decir que **ningún resultado lleva a que alguno de estos eventos se realice** y puede muy bien tomarse como la formalización del término "imposible" en este contexto.

N.B.

Si no entendió el párrafo anterior, no se preocupe. Siga adelante y regrese a él de cuando en cuando.

Por otro lado, tenemos eventos tales como:

Sale alguna cara en cada uno de los tres volados,

Esto seguro se da

y también:

La moneda cae al suelo,

Esto también

los cuales, según hemos manifestado, deben ocurrir siempre. A todos ellos se les representará mediante el conjunto Ω, que en este contexto se denominará **evento seguro.** Por supuesto, esto no es sino un modo de decir que salga lo que salga los eventos en cuestión se realizan.

Resumiendo

Ahora, ya podemos representar todas las proposiciones que denotan eventos (de hecho observados o susceptibles de serlo, imposibles y seguros) en este experimento en términos de subconjuntos del espacio de resultados. Esto se puede lograr mediante una correspondencia

$$\mathbf{p} \mapsto \mathbf{A}$$

(léase: a la proposición **p** se le asocia el conjunto **A**) misma que ya ha quedado establecida.

Operaciones entre proposiciones

Por otro lado, tenemos un cierto número de operaciones lógicas entre proposiciones, a saber:

a. La **conjunción** ($\wedge$, y).

b. La **disyunción** ($\vee$, o).

c. La **negación** ($\sim$, no).

Mediante estas operaciones, dadas las proposiciones **p** y **q**, podemos formar nuevas proposiciones:

$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$	"**p y q**"
$\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$	"**p o q**"
$\sim \mathbf{p}$	"no **p**"
$\sim \mathbf{q}$	"no **q**"

¡Reflexione!

¿Cómo se comporta la correspondencia establecida líneas arriba frente a estas operaciones?

Por ejemplo, tomemos:

p = cae un sol en el primer volado.

q = cae al menos un sol y al menos un águila.

Entonces, **p** $\wedge$ **q** es la proposición:

cae un sol a la primera y luego al menos un águila;

en tanto que **p** $\vee$ **q** es la proposición:

cae un sol a la primera, y si no, cae después.

En otras palabras,

p $\vee$ **q** = **cae por lo menos un sol.**

Análogamente,

$$\sim \mathbf{p} = \textbf{no cae sol en el primer volado}$$

$$\sim \; = \textbf{cae un águila en el primer volado}$$

y

$$\mathbf{q} = \textbf{o no cae ningún águila o no cae ningún sol}$$

$$= \textbf{caen puras águilas o puros soles.}$$

Cada una de estas proposiciones se puede representar mediante un subconjunto de Ω, igual que lo hicimos en las páginas anteriores. Por ejemplo, a **p** le corresponde el conjunto:

¿Es cierto que

p ∧ q, p ∨ q, ∼ p **y** ∼ q

son como se afirma?

$$\mathbf{A} = \{\textbf{saa, ssa, sas, sss}\};$$

mientras que a **q**, se le asocia el conjunto:

$$\mathbf{B} = \{\textbf{ass, sas, ssa, saa, asa, aas}\}.$$

Ejercicio

Convénzase de a **p ∧ q**, **p ∨ q**, **∼ p** y **∼ q** les corresponden los conjuntos:

$$\mathbf{C} = \{\textbf{sas, ssa, saa}\}$$

$$\mathbf{D} = \{\textbf{saa, asa, aas, ssa, sas, ass, sss}\}$$

$$\mathbf{E} = \{\textbf{aaa, aas, asa, ass}\}$$

$$\mathbf{F} = \{\textbf{aaa, sss}\}$$

respectivamente.

Ejercicio

Para los conjuntos anteriores, haga ver que:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}^c \qquad \mathbf{F} = \mathbf{B}^c$$

Así como se ha hecho para estas dos proposiciones particulares, se puede verificar lo siguiente:

Si **p** y **q** son dos proposiciones cualesquiera, que denotan eventos que ocurren al lanzar tres volados al hilo y si les corresponden los subconjuntos de Ω **A** y **B**, respectivamente, es decir, si:

$$\mathbf{p} \mapsto \mathbf{A}, \qquad \mathbf{q} \mapsto \mathbf{B};$$

entonces,

$$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \mapsto \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$$

$$\mathbf{p} \vee \mathbf{q} \mapsto \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$$

$$\sim \mathbf{p} \mapsto \mathbf{A}^c$$

Es necesario que antes de continuar la lectura resuelva el siguiente ejercicio.

Ejercicio Reconstruya el desarrollo anterior para las proposiciones:

p = caen exactamente dos águilas.

q = cae un sol en el segundo volado.

Se trata de construir las proposiciones **p** $\wedge$ **q**, **p** $\vee$ **q**, $\sim$ **p**, $\sim$ **q**; de representarlas mediante subconjuntos de Ω y de verificar qué conjunciones van a dar a intersecciones, qué "disyunciones van a dar a uniones" y qué "negaciones van a dar a complementos".

Anote:

p = cae sol en el primero.

r = cae al menos un sol.

Resulta claro que si se da **p**, se da automáticamente **r**, hecho que se denota poniendo:

$$\mathbf{p} \mapsto \mathbf{r}$$

(Léase "**p** implica **r**").

Hay veces, como en el caso de **r** y la proposición **s** dada por:

s = cae un sol en el primer volado y si no, cae después;

en las que se cumple tanto

$$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{s}$$

como:

$$\mathbf{s} \mapsto \mathbf{r}.$$

(Es cierto, ¿no?). Entonces se dice que **r** y **s** son proposiciones **equivalentes** y se escribe:

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{s}$$

Informalmente:

r y **s** son equivalentes si denotan el mismo hecho.

Veamos el siguiente problema.

Problema

¿Puede darse que dos proposiciones equivalentes se represen- ten mediante distintos subconjuntos de Ω?

En los párrafos que siguen se da la solución del problema anterior

En el caso de **p** y **r**, se puede verificar que:

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{D};$$

donde **A** y **D** son los subconjuntos de Ω que les corresponden, respectivamente. En otras palabras, se verifica que si:

$$\mathbf{P} \mapsto \mathbf{A}, \qquad \mathbf{r} \mapsto \mathbf{D}$$

y si:

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{r}$$

entonces:

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{D}.$$

¡Atención!

Se sugiere que construya un ejemplo que ilustre lo anterior con otra **p** y otra **r**.

Supongamos que a **r** y **s** les corresponden los subconjuntos **D** y **G** respectivamente y que son proposiciones equivalentes. Entonces:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}, \ \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{r}$$

y por lo anterior debe cumplirse que:

$$\mathbf{D} \subset \mathbf{G}, \ \mathbf{G} \subset \mathbf{D};$$

es decir, que:

$$\mathbf{D} = \mathbf{G}.$$

La respuesta al problema planteado líneas arriba es un rotundo:

No

es decir:

N.B.

Dos proposiciones equivalentes se representan necesariamente por el mismo conjunto.

Esto hace ver que resulta más económico representar los eventos mediante conjuntos que por medio de proposiciones: cada conjunto representa lo mismo que toda una clase de proposiciones equivalentes.

Bonito, ¿no?

Insistimos

Para modelar un experimento, se construye el conjunto de posibles resultados y se representan los eventos asociados al experimento mediante subconjuntos de dicho espacio.

Por ejemplo.

Hay ocasiones en que no todos los subconjuntos de Ω representan hechos observables

Supongamos que, por alguna razón, en el experimento de los tres volados al hilo no se puede saber el resultado del segundo volado —pero sí sabemos que se realizó—, de tal manera que el espacio de resultados del experimento sigue siendo Ω. Sin embargo, no deberíamos considerar eventos como:

cae águila en el segundo volado,

ya que nunca se sabrá si ocurrió o no. En otras palabras, el conjunto:

$\{$**aaa, aas, saa, sas**$\}$

no representa un evento observable en este experimento modificado.

El ejemplo que acabamos de dar, ilustra el hecho de que, en algunos casos, habrá subconjuntos del espacio de resultados a los que no se podrá considerar como representantes de ninguna proposición acerca del experimento que se esté analizando. En términos generales, los conjuntos que van a modelar a las proposiciones de interés constituyen una familia de subconjuntos de Ω que no necesariamente incluye a todos ellos. Denotemos por $\mathcal{A}$ a dicha familia de subconjuntos de Ω.

Veamos el siguiente problema:

Problema

Dado un experimento con Ω como espacio de resultados y una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω.

¿Qué propiedades mínimas debe tener $\mathcal{A}$ para que estén representados en ella todos los eventos asociados al experimento en cuestión?

Algo inmediato es que tenga representantes para los eventos seguro e imposible, los cuales **siempre** habrá que tomar en cuenta; es decir, que:

Propiedad de $\mathcal{A}$

$$\phi \in \mathcal{A},\ \Omega \in \mathcal{A}$$

Atención

> **Note que los elementos de $\mathcal{A}$ son subconjuntos de Ω.**

Por otro lado, hemos visto que conjunciones, disyunciones y negaciones de proposiciones van a dar a intersecciones, uniones y complementos de conjuntos. Así pues, dado que si **p** y **q** son proposiciones que denotan hechos observables en el experimento, entonces $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$, $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ y $\sim \mathbf{p}$ también, algo que debe pedírsele a $\mathcal{A}$ es que:

Si **A** y **B** están en $\mathcal{A}$; entonces,

$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ y $\mathbf{A}^c$ también;

es decir, que:

Propiedad de $\mathcal{A}$

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{A} \cap \mathbf{B}, \mathbf{A} \cup \mathbf{B}, \mathbf{A}^c \in \mathcal{A}.$$

En efecto, de no ser así, algunas proposiciones acerca de eventos observables no estarían representadas en $\mathcal{A}$.

Un alto en el camino para reflexionar

¿Entiende bien?

Es fácil; estamos tratando de dar un modelo matemático para un experimento y tratamos de ver qué objetos matemáticos van a constituirlo y qué propiedades deben éstos tener.

Ejemplo 1

Por ejemplo.

El experimento es tirar tres volados al hilo. Entonces Ω es el que ya conocemos y se puede tomar como $\mathcal{A}$ a la familia de **todos** los subconjuntos de Ω.

Ejemplo 2 Otro ejemplo más.

El mismo experimento, pero con la imposibilidad de observar el segundo volado. Puede tomarse el mismo espacio de resultados, pero debe cambiarse la familia de los eventos para tomar en cuenta las restricciones de observación; una buena elección es tomarla como aquella que consta de los siguientes 16 subconjuntos de Ω:

$$\phi, \{\text{aaa, asa,}\}, \{\text{saa, ssa}\},$$
$$\{\text{aas, ass}\}, \{\text{sas, sss}\},$$
$$\{\text{aaa, asa , saa, ssa}\},$$
$$\{\text{aaa, aas , asa, ass}\},$$
$$\{\text{aaa, sas , asa, sss}\},$$
$$\{\text{saa, aas , ssa, ass}\},$$
$$\{\text{saa, sas , ssa, sss}\},$$
$$\{\text{aas, sas , ass, sss}\},$$
$$\{\text{saa, aas, sas , ssa, ass, sss}\},$$
$$\{\text{aaa, aas, sas , asa, ass, sss}\},$$
$$\{\text{aaa, saa, sas , asa, ssa, sss}\},$$
$$\{\text{aaa, saa, aas , asa, ssa, ass}\}, \Omega$$

Piense un poquito

a. ¿Posee las propiedades requeridas la familia de eventos del primer ejemplo?

b. ¿Qué puede decirse con respecto a la familia de eventos del segundo ejemplo?

Son muchos los experimentos a los cuales se les puede asociar un modelo del tipo de:

$$<\Omega, a>;$$

donde,

1. Ω es un conjunto no vacío **(el espacio de resultados).**
2. a es una familia de subconjuntos de Ω, entre los cuales figuran ϕ y Ω, que es cerrada bajo la formación de uniones e intersecciones de pares de conjuntos y también frente a la formación de complementos.

Proposición.

Una propiedad de la familia de los eventos

$\mathcal{A}$ es cerrada bajo la formación de uniones e intersecciones finitas.

Demostración.

En efecto, se tiene que:

$$\mathbf{A}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{A}_n = (\mathbf{A}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{A}_{n-1}) \cup \mathbf{A}_n.$$

Por inducción, si

$$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{A}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{A}_{n-1}$$

entonces si $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n \in \mathcal{A}$, debe tenerse que $\mathbf{A}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{A}_n \in \mathcal{A}$ (por el caso $\mathbf{n} = 2$, que sabemos es válido). Así pues, $\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones finitas. Basta cambiar $\cup$ por $\cap$ y la misma demostración sirve para probar que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo la formación de intersecciones finitas.

¿Por qué no reconstruye el argumento anterior para las intersecciones? Así lo podrá entender mejor.

Proposición.

Otra propiedad de la familia de los eventos

$\mathcal{A}$ es cerrada bajo la formación de diferencias de conjuntos.

Demostración

En efecto, si $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{A}$, basta recordar que:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} \cap \mathbf{B}^c$$

para tener que $\mathbf{A} - \mathbf{B} \in \mathcal{A}$, puesto que los complementos e intersecciones de conjuntos en $\mathcal{A}$ necesariamente están en $\mathcal{A}$.

¿Deveras entendió el argumento anterior? Convénzase antes de continuar.

Las leyes de De Morgan

Se puede seguir trabajando sobre este modelo probando nuevos resultados. Uno que es muy importante, pues lo simplifica grandemente, se obtiene aplicando las **leyes de De Morgan,** a saber:

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = (\mathbf{A}^c \cap \mathbf{B}^c)^c$$

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = (\mathbf{A}^c \cup \mathbf{B}^c)^c$$

En efecto, dichas relaciones muestran que por ser $\mathcal{a}$ cerrada bajo la formación de complementos, basta pedir que $\mathcal{a}$ sea cerrada bajo U para que automáticamente sea cerrada bajo ∩ y recíprocamente.

Conteste, por favor

Recíprocamente, ¿qué?

Además, dado que:

$$\phi^c = \Omega, \ \Omega^c = \phi$$

Modelo de un experimento

la misma cerradura de $\mathcal{a}$ bajo la complementación permite simplificar la descripción del modelo:

$$< \Omega, \mathcal{a} >$$

diciendo que:

1. Ω es un conjunto no vacío.
2. $\mathcal{a}$ es una familia de subconjuntos de Ω tal que:
   a. $\Omega \in \mathcal{a}$.
   b. $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{a} \Rightarrow \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \in \mathcal{a}$.
   c. $\mathbf{A} \in \mathcal{a} \Rightarrow \mathbf{A}^c \in \mathcal{a}$.

Compare esta descripción del modelo con la que vimos algunas páginas atrás. ¿No le parece más simple? Hay menos cosas que recordar, ¿no? ¡Y pensar que las dos descripciones son enteramente equivalentes!

Las álgebras booleanas aparecen en muchas áreas de la matemática

A veces se dice que una familia de conjuntos con las propiedades **a, b, c** es un **álgebra de Boole (léase *Bul*)** o **álgebra booleanana (léase *buleana*).** En particular, la familia de todos los subconjuntos de Ω es un álgebra booleana ¿no es cierto?, y también la familia que consta del conjunto vacío y de Ω solamente.

En cada situación particular, la elección de álgebra de eventos la dicta nuestro criterio sobre qué subconjuntos de Ω son "interesantes" y deben, por lo tanto, ser tomados en cuenta como representantes de eventos asociados al experimento de que se trate.

Esperamos que haya quedado claro que, en cualquier caso, la familia de eventos debe constituir un álgebra booleana de subconjuntos del espacio de resultados; es decir, de Ω. De no ser así, algo anda mal.

Tres ejemplos de modelos de experimentos: las estadísticas de Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein y Fermi-Dirac

Regresemos por un momento a los modelos para estadísticas de partículas que construimos en la secuencia anterior. Con la ayuda de las ideas que hemos presentado, se pueden dar álgebras de eventos para los tres modelos en términos de un mismo conjunto de resultados, a saber:

$$\Omega = \mathbf{E}^{r};$$

donde:

$$\mathbf{E} = \{ \mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n \}$$

y $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n$ son los diferentes valores que puede tomar la energía de cada una de las **r** partículas que constituyen el sistema de interés.

Algebra de Maxwell Boltzmann

Para el modelo de Maxwell-Boltzmann se considera que las distintas configuraciones (es decir, los elementos de Ω) son todas observables; como hay sólo un número finito de ellas (son un total de $\mathbf{n}^{r}$) y cada conjunto con un solo elemento es un evento elemental, al formar todas las uniones finitas de dichos eventos elementales se generan **todos** los subconjuntos de Ω. Así pues, el álgebra de **eventos** correspondiente a este modelo es la familia de todos los subconjuntos de Ω, a la que denotamos como 2^{Ω}; es decir,

$$\mathcal{A}_{MB} = 2^{\Omega}$$

Sí entendió el razonamiento anterior, ¿no es así?

Construcción del álgebra de Bose-Einstein

Veamos qué pasa con el modelo de Bose-Einstein, para el cual de nuevo se puede tomar Ω como espacio de resultados, pero sólo las configuraciones distinguibles son observables.

Recuerde que:

> **Una configuración distinguible es un conjunto de configuraciones; es decir, un subconjunto de Ω.**

Así, por ejemplo, la configuración distinguible $\mathbf{A}_{r_1 \ldots r_n}$ consta de aquellas configuraciones $(\mathbf{E}_{i_1}, \ldots \mathbf{E}_{i_r})$ de Ω con la propiedad de que de los números $E_{i_1}, \ldots, E_{i_r}$, r_1, son iguales a E_1, r_2 son iguales a E_2, etc.

En otras palabras, r_1 partículas están en el primer nivel de energía; r_2 de ellas se encuentran en el segundo nivel, etc., y, por supuesto, $r_1, \ldots, r_n$ son enteros no negativos cuya suma es **r.**

Por la secuencia anterior sabemos que hay:

$$m = \binom{n + r - 1}{n - 1}$$

configuraciones distinguibles. Numérense estos conjuntos del 1 al **m** y denótese como $C_1, C_2, \ldots C_m$, respectivamente.

Sea $\mathcal{a}_{BE}$ el álgebra de eventos correspondiente al modelo de Bose-Einstein. Evidentemente debe tenerse que:

$$C_1, \ldots C_n \in \mathcal{a}_{BE}.$$

Deben estar también en $\mathcal{a}_{BE}$ aquellos subconjuntos de Ω que se pueden generar uniendo las diferentes configuraciones distinguibles, tales como:

$$C_1 \cup C_2,\ C_3 \cup C_4 \cup C_{17}, \text{ etc.}$$

En particular,

$$\Omega = C_1 \cup \ldots \cup C_m$$

por lo que:

$$\Omega \in \mathcal{a}$$

tal y como debe ser. ¿Está usted convencido de que:

$$\Omega = C_1 \cup \ldots \cup C_m?$$

Demostración de que toda configuración está en alguna configuración distinguible

Veamos el porqué de esta aseveración.

En efecto, dada una configuración cualquiera, digamos:

$$(E_{i_1}, \ldots, E_{i_r}),$$

contamos cuántas veces aparece $\mathbf{E}_1$, cuántas veces aparece $\mathbf{E}_2$, etc.; en la lista; si $\mathbf{E}_1$ aparece $\mathbf{s}_1$ veces, $\mathbf{E}_2$ aparece $\mathbf{s}_2$ veces, etc., entonces la configuración elegida está en $\mathbf{A}_{s_1 \ldots s_n}$. Resulta entonces que toda configuración está en alguna configuración distinguible, es decir,

$$\Omega \subset \mathbf{C}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{C}_m.$$

Por supuesto, está de acuerdo en que:

$$\mathbf{C}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{C}_m \subset \Omega$$

¿no es cierto? Entonces resulta que:

$$\Omega = \mathbf{C}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{C}_m$$

tal y como habíamos asegurado.

¿Quedó claro? Pues continúe.

Las configuraciones distinguibles son ajenas por parejas

Más aún, es claro que dos configuraciones distinguibles distintas no pueden tener elementos en común, es decir,

$$\mathbf{C}_i \cap \mathbf{C}_j = \phi \text{ si } \mathbf{i} \neq \mathbf{j}.$$

Sí está claro, ¿verdad?

De aquí resulta que el complemento de un conjunto como $\mathbf{C}_1 \cup \mathbf{C}_2$ no es otro que $\mathbf{C}_3 \cup \ldots \cup \mathbf{C}_m$. En términos generales, el complemento de una unión de configuraciones distinguibles es la unión de aquellas configuraciones distinguibles que no habían formado parte del conjunto cuyo complemento se está tomando. Análogamente, al unir dos uniones de configuraciones distinguibles se obtiene una unión de configuraciones distinguibles. Todo lo anterior hace ver que la familia de subconjuntos de Ω que se obtiene al tomar todas las uniones de las configuraciones distinguibles es un álgebra booleana y es, de hecho, la más pequeña álgebra booleana de todas las que contienen a todas las configuraciones distinguibles.

Caray, esto es así medio complicado, ¿verdad? No se desespere; si siente que no ha entendido cabalmente el párrafo anterior, siga adelante, que al fin y al cabo esto es solamente un ejemplo de construcción de un álgebra booleana.

Algebra de Bose-Einstein

En todo caso, tomamos como $\mathcal{a}_{BE}$ a la mínima álgebra booleana que contiene a todas las configuraciones distinguibles y que con grandes trabajos acabamos de construir.

De paso, ha usted aprendido un procedimiento que se usa frecuentemente para construir álgebras de conjuntos. Se da una familia de conjuntos de interés:

$$A_1, \dots, A_p$$

en Ω, tal que dichos conjuntos:

1. Son ajenos por parejas,

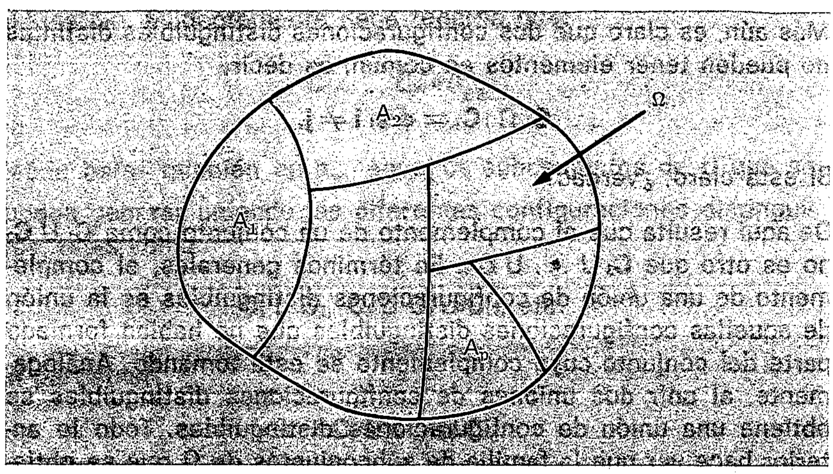
$$A_i \cap A_j = \phi \text{ si } i \neq j.$$

2. Cubren a Ω,

$$A_1 \cup \dots \cup A_p = \Omega.$$

¿No le recuerda esto algo que ya estudió al ver relaciones de equivalencia?

Entonces, se dice que estos conjuntos constituyen una **partición** de Ω:



Entonces, se forman todas las uniones de la forma:

$$A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n},$$

las que constituyen una familia de conjuntos a la que se denota como $\mathcal{a}$.

Esta familia $\mathcal{a}$ contiene a Ω es cerrada bajo la formación de uniones y también frente a la complementación, por lo que se dice que es un álgebra booleana. $\mathcal{a}$ contiene a $A_1, \dots, A_p$ como elementos y es de hecho la más pequeña con esa propiedad. $\mathcal{a}$ se llama el álgebra booleana **generada** por la partición en cuestión.

Así pues:

El álgebra de eventos de Bose-Einstein es aquella generada por la familia de configuraciones distinguibles.

Algebra de Bose-Einstein

Finalmente, la estadística de Fermi-Dirac supone también que sólo las configuraciones distinguibles son observables, por lo que podemos anotar:

Algebra de Fermi-Dirac

$$\mathcal{a}_{\mathrm{FD}} = \mathcal{a}_{\mathrm{BE}}.$$

Tenemos ya varias instancias del modelo de experimentos:

$$< \Omega, \mathcal{a} > .$$

En la próxima secuencia completaremos esta construcción mediante la idea de **probabilidad.**

EJERCICIOS DE APLICACION

N.B. Estos ejercicios han sido preparados para que usted aplique lo que aprendió. Realícelos, le ayudarán a reafirmar sus conocimientos. Si tiene alguna duda, consulte a su asesor.

La manera de comprobar la exactitud de sus respuestas, es comparándolas con el contenido incluido en el texto y/o comentándolas con su asesor.

1. Investigue en la bibliografía sugerida o en la que usted considere conveniente, las diferencias fundamentales entre cada uno de los tres modelos experimentales estudiados en esta secuencia.

2. Revise los ejemplos (**b**, 1) a (**b**, 16) de la sección 1.2 del libro de Feller (ver sugerencias de estudio) y construya el modelo común a todos ellos. Debe dar el espacio de resultados y el álgebra de eventos.

3. Suponga que se toma una persona al azar y se le pregunta por sus preferencias en cuanto a beber té o café. Se puede tener sólo cuatro respuestas:

   a. **Le gusta el café y no el té.**

   b. **Le gusta el té y no el café.**

   c. **Le gustan el té y el café indistintamente.**

   d. **No le gustan ni el té, ni el café.**

   Si Ω es el conjunto de todos los seres humanos, sean **A, B, C** y **D** los conjuntos de personas que responden de cada una de las cuatro maneras anteriores, respectivamente. Claramente...

   $$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{D} = \Omega$$

   y la unión es ajena; es decir,

   $$\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$$

   es una partición de Ω.

   Construya el álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ generada por esta partición e interprete cada uno de los 2^4 eventos en palabras del lenguaje ordinario.

4. (Feller, cap. 1, ejem. 4). Elabore un modelo para el experimento consistente en lanzar una moneda tantas veces como sea necesario para que se obtengan dos resultados iguales, uno inmediatamente después del otro. ¿Cuántos posibles resultados hay en este experimento?

5. Considere el proceso mediante el cual las proposiciones lógicas acerca de los elementos de un cierto conjunto se representan mediante subconjuntos de dicho conjunto y recíprocamente.

   a. ¿A qué relaciones entre proposiciones corresponden las leyes de De Morgan para conjuntos?

   b. Niegue las proposiciones:

      1. **A mí me gusta el cine y el teatro.**

      2. **No son peras ni son manzanas.**

Después de haber realizado los ejercicios, usted podrá afirmar su aprendizaje. Lo que no haya sido muy claro o no haya podido captar perfectamente, coméntelo con su asesor. **N.B.**

SUGERENCIAS DE ESTUDIO

Para ampliar su información se sugiere que:

- Consulte los siguientes libros:

FELLER, WILLIAM, **An Introduction to Probability Theory and its Applications,** Vol. 1, New York, Edit. John Wiley & Sons, 1968, cap. 1 y 4.

SUPPES, PATRICK, **Introduction to Logic,** Princeton, New Jersey, Edit. Van Nostrand, Co. Inc. 1964, cap. 9 a 12.

Secuencia 4

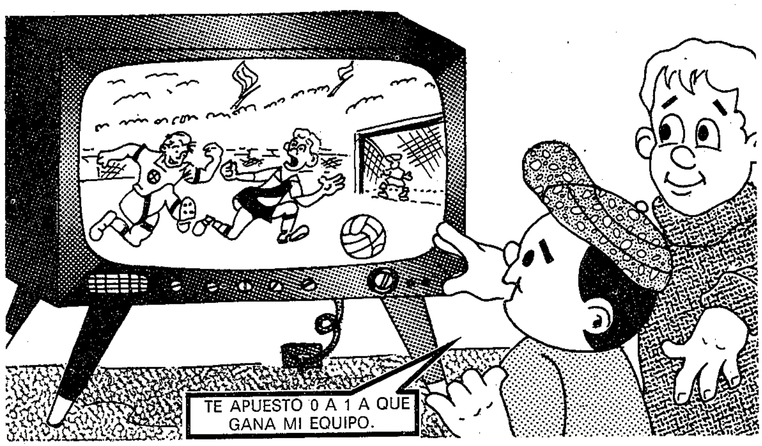
Espacio probabilístico

Ideas preliminares

Ya hemos concluido la construcción de un modelo matemático para hablar de los eventos asociados a un cierto experimento, en la forma de la pareja ordenada:

$$< \Omega, \mathcal{a} >;$$

donde Ω es un conjunto no vacío, cuyos elementos son los **resultados** del experimento en cuestión, y $\mathcal{a}$ es un álgebra booleana de subconjuntos de Ω; sus elementos son conjuntos y representan a los **eventos** asociados a dicho experimento.



Un modelo matemático tal, constituye una representación dentro de la teoría de conjuntos del modelo lingüístico formado por las proposiciones lógicas acerca de los hechos que tienen lugar cuando se realiza el experimento. Ahora bien, en lógica se acostumbra evaluar las proposiciones asignándoles valores de 0 (cero) o 1 (uno) o, en forma análoga, asignándoles sus valores de verdad, **falso** o **verdadero,** respectivamente. El sistema así obtenido se denomina cálculo proposicional; George Boole fue uno de sus creadores. El cálculo proposicional equivale a completar el modelo de los eventos mediante una función **V** que asocia a cada evento $\mathbf{A} \in \mathcal{a}$ un valor numérico 0 o 1 únicamente, sujeta a la interpretación:

$$\mathbf{V}(\mathbf{A}) = \begin{cases} 1 \text{ si } \mathbf{A} \text{ es verdadero} \\ 0 \text{ si } \mathbf{A} \text{ es falso} \end{cases}$$

dando así lugar al modelo extendido:

$$<\Omega, \mathcal{a}, \mathbf{V}>$$

para un experimento con resultados que son falsos o verdaderos.

Con todo y que el cálculo proposicional es de mucha utilidad en una gran variedad de situaciones, hay muchas otras en las que pretender que las proposiciones acerca de hechos experimentales resulten falsas o verdaderas exclusivamente resulta demasiado forzado.

Por ejemplo, al lanzar tres volados al hilo, será falsa o verdadera la proposición:

Caen dos águilas y un sol

y ¿qué se puede decir de la proposición:

Caen tres soles seguidos.

Evidentemente, para este tipo de situaciones se debe ser más flexible, para poder así admitir proposiciones de cuya verdad o falsedad no estamos completamente seguros. Esto lo podemos hacer asignando a cada proposición o evento, un número real comprendido entre 0 y 1, que de alguna manera represente el grado de confianza que tenemos en que dicho evento tenga lugar cuando el experimento en cuestión se lleve a efecto.

¿Cómo lo podríamos hacer?

La probabilidad

En el lenguaje de la teoría de conjuntos, lo que buscamos es definir una función de $\mathcal{a}$ en $[0, 1]$ (una regla que a cada evento **A** le asocie un y sólo un "valor de verdad" $\alpha \in [0, 1]$), función a la cual llamaremos **probabilidad** y denotaremos mediante la letra **P.** Entonces escribiremos:

Denotación de probabilidad

$$\boxed{\mathbf{P} : \mathcal{a} \rightarrow [0, 1]}$$

Esto, por supuesto, lo podemos hacer de una infinidad de maneras, dependiendo de lo que queramos que esta función represente. Aquí, igual que en cualquier otra instancia de construcción de modelos matemáticos de la realidad, el principal problema es precisamente la adecuación de la construcción matemática en relación con el comportamiento observado en la práctica.

El método científico se basa en la observación y la experimentación, mismas con la que se contrastan las predicciones de la teoría

En la secuencia 1 de la primera unidad del Módulo 1, Probabilidad y Estadística, de esta serie estudiamos en detalle el método científico y vimos que toda teoría debe contrastarse con la realidad y que del resultado de dicha confrontación depende si la teoría es aceptable o no.

Sí se acuerda, ¿no?

¿Cómo se asignan las probabilidades?

Pues aquí también podemos seguir el mismo enfoque empirista y asignar probabilidades a los eventos (es decir, definir la función $\mathbf{P} : \mathcal{a} \rightarrow [0, 1]$) a partir de experimentos.

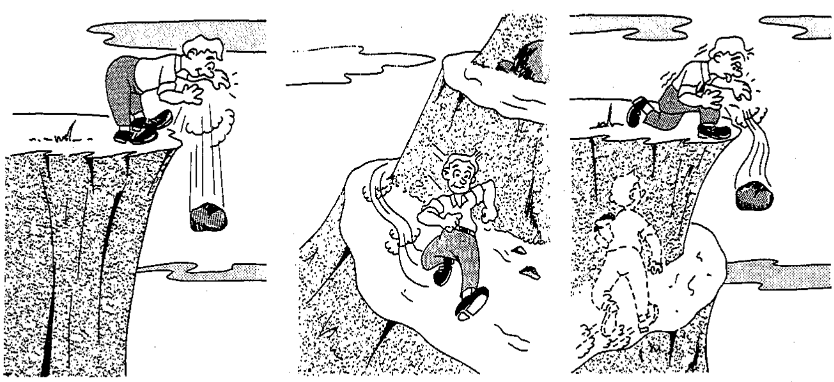
Ejemplo

Por ejemplo, consideremos el experimento:

Soltar una piedra desde una altura de 16 m.

Se repite el experimento cinco veces y se obtienen los siguientes datos:

Repetición	Tiempo de caída
1	1.80 seg.
2	1.78 seg.
3	1.81 seg.
4	1.78 seg.
5	1.82 seg.



En principio, el tiempo de caída puede tomar **cualquier** valor positivo, sujeto únicamente a las consideraciones acerca de la precisión que hacíamos al inicio de la secuencia anterior. De los resultados vemos que se ha realizado el evento:

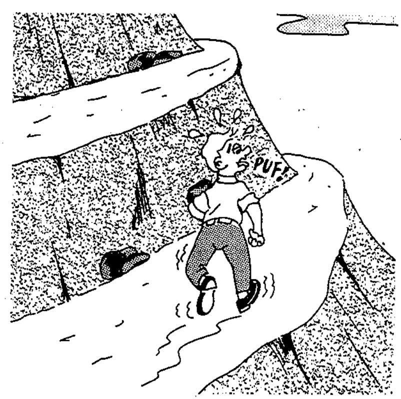
El tiempo de caída está entre:

1.78 seg. y 1.82 seg.

Hay una dispersión total de 0.04 únicamente que, con respecto al promedio de los dos valores extremos (1.78 y 1.82), resulta una dispersión relativa de únicamente:

$$\frac{0.04}{1.80} \times 100 = 2.2\%.$$

Entonces, con un buen grado de seguridad se puede decir: "es verdadero que



"el resultado de la medición es

1.80 ± 0.02 seg.",

pues de las cinco repeticiones hechas, en todas se observó el evento en cuestión, es decir, con una frecuencia de 100%. Con base en nuestra experiencia, podemos decir con gran confianza que después de repetir un gran número de veces el experimento, si no en todas las repeticiones sí en una abrumadora mayoría, obtendremos el mismo evento.

Frecuencia relativa

Definamos la frecuencia relativa de dicho **evento en** n **repeticiones del experimento** como:

Frecuencia relativa de un evento

El cociente entre el número de veces que se observa el evento y el número total de veces que se repite el experimento.

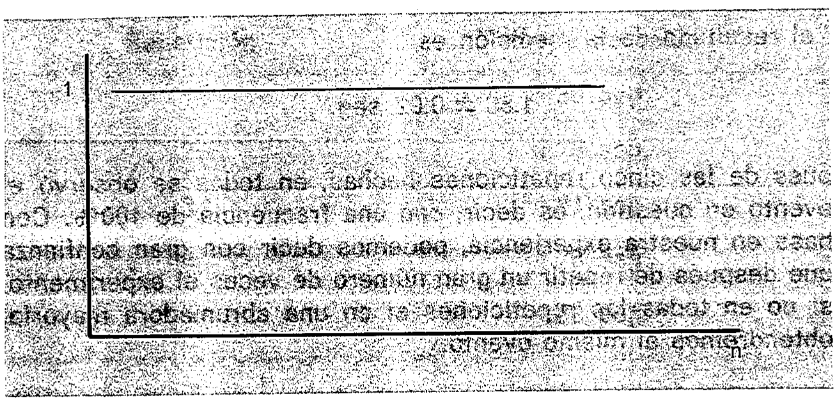
Si realizáramos este experimento, obtendríamos una tabla de valores como la siguiente:

Núm. de repeticiones	Frecuencia relativa
5	1.
10	0.99
15	0.999
20	0.999
100	0.9999
200	0.9999
1000	0.9999

Para todos los fines prácticos se puede considerar una función constante, de valor 1, y es por eso que se dice que el enunciado correspondiente es verdadero sin ningún otro calificativo.

La gráfica frecuencia relativa contra número de repeticiones en este casc es:

Este fenómeno muestra un acusado carácter determinista



Una manera alternativa de expresar los resultados de este experimento es diciendo que:

La probabilidad de que el resultado de la medición del tiempo de caída esté entre 1.78 y 1.82 seg., es igual a 1.

Veamos qué pasa en situaciones tales como cuando se lanza un volado. De acuerdo con lo que hemos visto ampliamente en la secuencia anterior, los resultados que podemos esperar al repetir este experimento un cierto número de veces son otras tantas anotaciones de "águila" o "sol".

Si se repite el experimento diez veces, típicamente podemos esperar resultados como los anotados en la siguiente tabla:

Tabla de resultados en 10 volados

Repetición	**Resultado**
1	Aguila
2	Sol
3	Sol
4	Aguila
5	Aguila
6	Aguila
7	Sol
8	Aguila
9	Sol
10	Aguila

La frecuencia relativa con que ocurre el evento:

sale águila,

en este experimento es:

$$6/10 = 0.6$$

Si continuamos el experimento y llegamos a 50 repeticiones, bien puede suceder que obtengamos 28 águilas, lo que da una frecuencia relativa de:

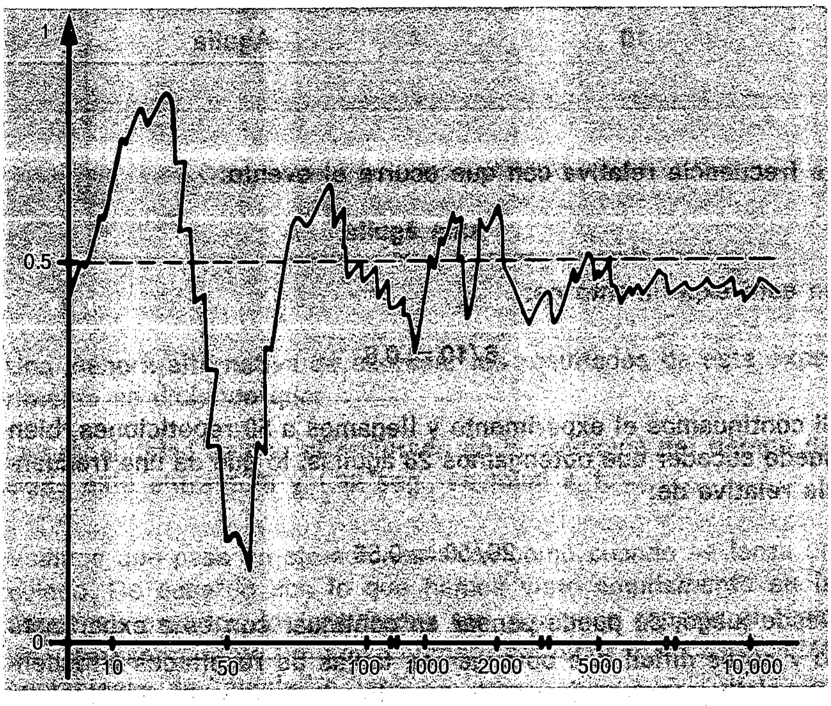
$$28/50 = 0.56.$$

Desde luego, se puede pensar en continuar con este experimento y no es difícil que obtengamos tablas de resultados (frecuencia relativa contra número de repeticiones) como la siguiente:

Núm. de volados	Frecuencia relativa de las águilas
20	0.60
50	0.46
100	0.64
200	0.60
300	0.48
400	0.46
500	0.50
1000	0.52
2000	0.47
5000	0.49
10000	0.50

Gráficamente estos resultados se ven así:

Aquí se ven fuertes tendencias no determinísticas



Según estos datos, se observa una gran variabilidad en los valores de la frecuencia relativa, pero también una tendencia de dichos valores de agruparse en torno a un valor, que para este experimento anda alrededor de 0.49. En términos generales, los resultados indican que la frecuencia relativa se acerca más a 0.49, cuanto mayor sea el número de repeticiones del volado. Se antoja sensato llamarle a este valor así determinado, **la probabilidad de que caiga águila.**

Enfoque frecuentista para asignar probabilidades

Con estas ideas en mente, definimos los siguientes conceptos, con relación a un experimento modelado hasta ahora, mediante una pareja ordenada:

$$< \Omega, \mathcal{a} >$$

Elijamos un evento $\mathbf{A} \in \mathcal{a}$, repitamos el experimento en cuestión un cierto número de veces (**n**) y anotemos el número de dichas repeticiones ($\mathbf{n}_A$) en que fue observado.

Frecuencia relativa

Escribamos:

$$\mathbf{f}_A = \frac{\mathbf{n}_A}{\mathbf{n}}$$

y llamemos a $\mathbf{f}_A$:

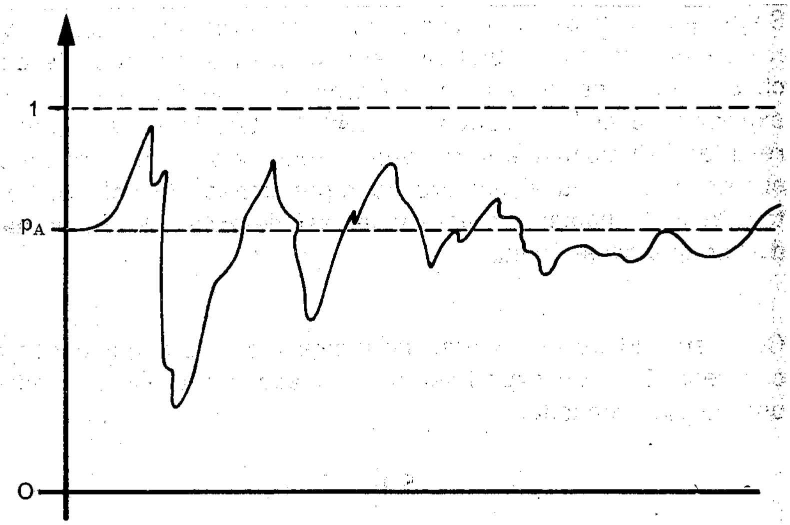
La frecuencia relativa del evento **A** en las **n** repeticiones del experimento.

Este concepto resulta fructífero, pues es un hecho empírico muchas veces observado que:

> **A medida que** n **es más grande, los valores de** f_A **fluctúan cada vez menos alrededor de un valor fijo** p_A **que se llama "la probabilidad del evento** A**".**

Esta afirmación constituye el llamado **principio de regularidad estadística** y se puede ilustrar mediante la gráfica:

Representación gráfica del principio de regularidad estadística



Entonces podemos asignar probabilidades a los diferentes eventos asociados al experimento en cuestión; es decir, definir la función adecuada:

$$\mathbf{p} : \mathcal{a} \rightarrow [0, 1]$$

poniendo:

$$\mathbf{P(A) = p_A}$$

N.B. Esta manera de asignar probabilidades a los eventos corresponde a una posición filosófica de tipo empirista y se conoce como enfoque frecuentista.

Esta no es la única manera de efectuar dicha asignación; tenemos además:

Enfoque laplaciano para asignar probabilidades

- **El enfoque laplaciano.** En la secuencia 2 de este Módulo ya nos hemos referido a la definición clásica de Laplace.

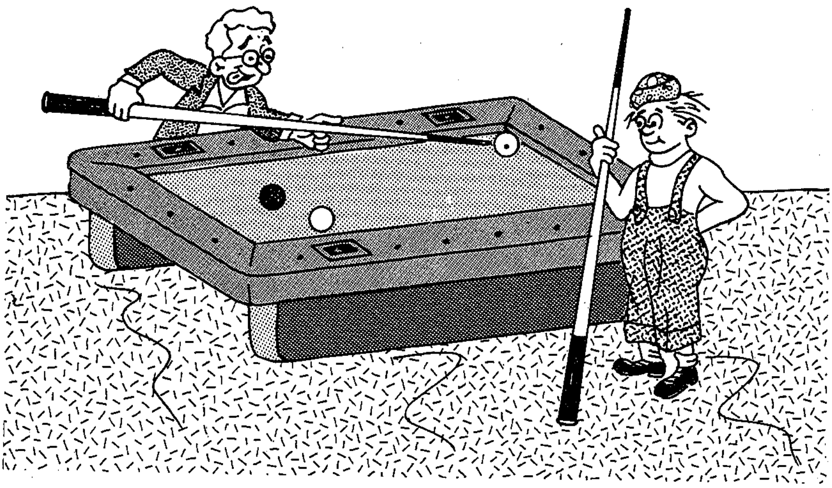
Enfoque subjetivista

- **El enfoque subjetivista** considera que la probabilidad expresa meramente el grado de confianza que se tiene de que ocurra el evento correspondiente y quizá otros más.

Se pueden reconciliar los diferentes enfoques con el frecuentista

Fréchet en su libro *Las matemáticas y lo concreto* (ver las sugerencias de estudio para esta secuencia) sostiene que los diferentes enfoques se pueden reducir al frecuentista, ya que de una u otra manera siempre se recurre a la experiencia.

¿De dónde, si no, resulta la confianza que en términos de probabilidad expresa el subjetivista? Toma en cuenta su experiencia (y la de toda la humanidad) para emitir sus juicios. Todo esto es muy interesante. ¿Qué opina usted?



Regresemos a la asignación de probabilidades siguiendo el enfoque frecuentista.

Evidentemente, cualquiera que sea el evento y el número de repeticiones del experimento, debe tenerse que:

$$0 \leq \mathbf{f}_A \leq 1.$$

Además, como el evento seguro siempre se da:

$$\mathbf{f}_\Omega = 1.$$

También, si **A** y **B** son eventos que se excluyen mutuamente (no hay ningún resultado para el que se den los dos a la vez),entonces el número de veces en que se da uno de los dos es:

$$\mathbf{n}_{A \cup B} = \mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B.$$

Resulta entonces que:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \phi \Rightarrow \mathbf{f}_{A \cup B} = \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B.$$

Así pues, nuestra asignación de probabilidades se efectúa mediante una función $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ (la probabilidad) con las propiedades:

Aditividad de la probabilidad

i. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

ii. $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B})$, si $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \phi$.

Así queda constituido el modelo más rico:

$$< \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} >$$

llamado **espacio probabilístico.**

Lector/a:

¿Qué es cada uno de los tres elementos que constituyen un espacio probabilístico?, ¿qué propiedades tienen?, ¿qué representan?

Recuerde el ejemplo del volado.

El ejemplo del volado

De acuerdo con los resultados del volado (ver el diagrama correspondiente) para la moneda usada en el experimento se tiene un espacio probabilístico con:

$$\Omega = \{\mathbf{a}, \mathbf{s}\}$$

$$\mathcal{A} = \{\phi, \{\mathbf{a}\}, \{\mathbf{s}\}, \Omega\}$$

$$\mathbf{P}(\{\mathbf{A}\}) = 0.49$$

$$\mathbf{P}(\{\mathbf{s}\}) = 0.51$$

y, por supuesto,

$$\mathbf{P}(\phi) = 0$$

$$\mathbf{P}(\Omega) = 1$$

Vuelta a la estadística de partículas

En la ciencia, a menudo ocurre que en algunas situaciones de interés es difícil y aún imposible experimentar con ellas. Este es ciertamente el caso cuando se estudia la manera en que se reparte la energía de un sistema de partículas. En casos como éstos se procede **postulando** un cierto modelo y verificándolo luego en términos de sus consecuencias observables.

Maxwell-Boltzmann

Así, por ejemplo, el modelo de Maxwell-Boltzmann se complementa postulando que **todas las configuraciones tienen la misma probabilidad.** Dado que son $\mathbf{n}^r$, debe ser que:

$$\mathbf{P}_{MB}(\{\omega\}) = \frac{1}{\mathbf{n}^r}$$

y, en general,

$$\mathbf{P}_{MB}(\mathbf{A}) = \frac{\text{núm. } \mathbf{A}}{\mathbf{n}^r}$$

para cada $\mathbf{A} \in a_{MB}$.

Bose-Einstein

En cambio, en la estadística de Bose-Einstein los eventos más pequeños son las configuraciones distinguibles, que se supone tienen la misma probabilidad.

Así pues,

$$\mathbf{P}_{BE}\left(\mathbf{A}_{r_1 \ldots r_n}\right) = \binom{\mathbf{n}+\mathbf{r}-1}{\mathbf{n}-1}^{-1}$$

y, en general, si $\mathbf{A}$ consta de $\mathbf{k}$ configuraciones distinguibles,

$$\mathbf{P}_{BE}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{k}}{\binom{\mathbf{n}+\mathbf{r}-1}{\mathbf{n}-1}}.$$

Fermi-Dirac

Finalmente, la estadística de Fermi-Dirac supone que únicamente las configuraciones distinguibles $\mathbf{A}_{r_1 \ldots r_n}$, donde $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$, son iguales a 0 o a 1 se pueden presentar y que son todas equiprobables. Como hay $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}}$ de ellas, debe tenerse que:

$$\mathbf{P}_{FD}\left(\mathbf{A}_{r_1 \ldots r_n}\right) = \begin{cases} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}}^{-1} & \text{si } \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

En general, si $\mathbf{A} \in a_{FD}$ consta de un cierto número de configuraciones distinguibles, de las cuales $\mathbf{l}$ únicamente tienen $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n \in \{0, 1\}$, entonces:

$$\mathbf{P}_{FD}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{l}}{\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}}}$$

Comparación de los tres modelos con el experimento

Esta ha arrojado los siguientes resultados:

- No existen sistemas de partículas que se comporten según el espacio probabilístico de Maxwell-Boltzmann.
- Los fotones, núcleos y átomos que contienen un número par de partículas elementales se comportan según el espacio probabilístico de Bose-Einstein.
- El espacio probabilístico de Fermi-Dirac se aplica a los electrones, neutrones y los protones.

Generalmente, las predicciones de los modelos probabilísticos como los anteriores que ya se pueden contrastar con el experimento son algo más elaboradas y se refieren a enriquecimientos hechos a dichos modelos. La siguiente unidad de este Módulo se refiere a esos conceptos que enriquecen el modelo llamado espacio probabilístico.

Tenemos ya algunos ejemplos de **espacio probabilístico:**

$$< \Omega, \mathcal{a}, \mathbf{P} >$$

Algunas propiedades de los modelos

Veamos ahora algunas propiedades de los modelos de este tipo, cuyo conocimiento nos permitirá manejarlos mejor.

En cada caso, los conjuntos a los que se aplique **P** serán eventos en $\mathcal{a}$.

Propiedad 1

Propiedad 1.

La probabilidad del complemento es el complemento de la probabilidad.

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}^c) = 1 - \mathbf{P}(\mathbf{A}).$$

En efecto:

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{A}^c = \Omega, \quad \mathbf{A} \cap \mathbf{A}^c = \phi,$$

de lo cual resulta que:

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{A}^c) = 1$$

en virtud de la aditividad de **P.**

Propiedad 2.

Propiedad 2

La probabilidad de una diferencia es la diferencia de las probabilidades, si el evento que se quita es parte del otro.

Si

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{B};$$

entonces,

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}-\mathbf{A})=\mathbf{P}(\mathbf{B})-\mathbf{P}(\mathbf{A}).$$

Aquí basta con observar que:

$$\mathbf{B}=\mathbf{A} \cup (\mathbf{B}-\mathbf{A}),\ \mathbf{A} \cap (\mathbf{B}-\mathbf{A})=\phi$$

y aplicar la aditividad de **P** para obtener que:

$$\mathbf{P}(\mathbf{B})=\mathbf{P}(\mathbf{A})+\mathbf{P}(\mathbf{B}-\mathbf{A}).$$

Propiedad 3.

Propiedad 3

La probabilidad es mayor cuanto más grande es el evento.

Si

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{B};$$

entonces,

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{P}(\mathbf{B}).$$

Esta propiedad se obtiene como corolario de la propiedad 2, ya que $\mathbf{P}(\mathbf{B}-\mathbf{A}) \geq 0$.

Propiedad 4

Propiedad 4

La propiedad de la unión es la suma de las probabilidades **menos** la probabilidad de la intersección.

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})=\mathbf{P}(\mathbf{A})+\mathbf{P}(\mathbf{B})-\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

Note que si:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}=\phi;$$

entonces,

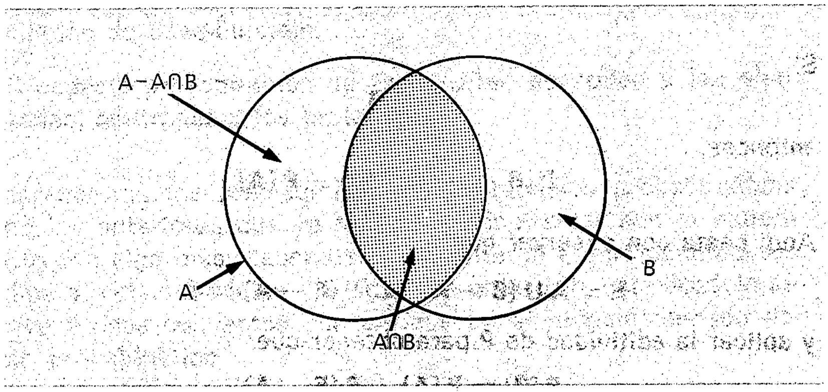
$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})=0$$

y se recupera la aditividad.

En efecto,

$$A \cup B = [A - A \cap B] \cup B$$

según se puede verificar fácilmente, por ejemplo observando la figura:



Luego, por la aditividad de **P**

$$P(A \cup B) = P(A - A \cap B) + P(B)$$

y, por la propiedad 2,

$$P(A - A \cap B) = P(A) - P(A \cap B),$$

ya que:

$$A \cap B \subset A.$$

Entonces, substituyendo se obtiene que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

como se aseguró; se generaliza así la aditividad de **P,** al no necesitar que **A** y **B** sean ajenos para poder calcular su probabilidad.

Finalmente, otro tipo de generalización de la aditividad de **P** (esta vez en cuanto al número de conjuntos que se consideran) se da en la siguiente propiedad.

Propiedad 5

Propiedad 5

La probabilidad de una unión ajena es la suma de las probabilidades.

Si $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ son eventos ajenos por parejas; es decir,

$$\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j = \phi \text{ si } i \neq j;$$

entonces,

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{A}_n) = \mathbf{P}(\mathbf{A}_1) + \ldots + \mathbf{P}(\mathbf{A}_n).$$

Esta propiedad se demuestra fácilmente por inducción. En efecto, es válida para $\mathbf{n} = 2$. Supongamos que es válida para $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ y sean $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k, \mathbf{A}_{k+1}$ eventos ajenos por parejas.

Entonces,

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{A}_k) = \mathbf{P}(\mathbf{A}_1) + \ldots + \mathbf{P}(\mathbf{A}_k)$$

en virtud de la hipótesis de inducción. Además,

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{A}_k) \cap \mathbf{A}_{k+1} \\
&= (\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_{k+1}) \cup \ldots \cup (\mathbf{A}_k \cap \mathbf{A}_{k+1}) \\
&= \phi \cup \ldots \cup \phi \\
&= \phi
\end{aligned}$$

y, entonces,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{A}_k \cup \mathbf{A}_{k+1}) \\
&= \mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{A}_k) + \mathbf{P}(\mathbf{A}_{k+1}) \\
&= \mathbf{P}(\mathbf{A}_1) + \ldots + \mathbf{P}(\mathbf{A}_k) + \mathbf{P}(\mathbf{A}_{k+1}).
\end{aligned}$$

Así pues, la propiedad vale para $\mathbf{n} = \mathbf{k} + 1$.

Por inducción vale entonces para toda $\mathbf{n} \geq 2$.

Para terminar esta secuencia, señalaremos algunas deficiencias que aún tiene el modelo probabilístico que hemos construido. Para lo cual, consideraremos el siguiente ejemplo.

Aquí se detectan algunas deficiencias de nuestro modelo, y se indica cómo corregirlas

Experimento:

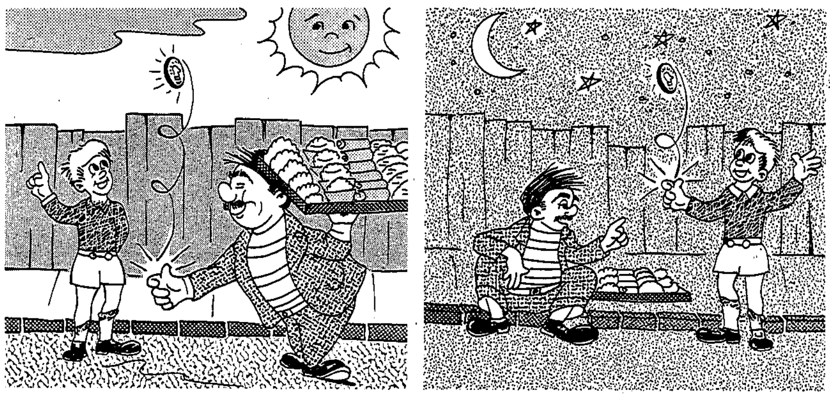
Se juegan volados y se anota el momento en que aparece la primera águila.

Aquí un resultado concebible es que nunca caiga un águila; es decir, la sucesión infinita de soles

$$(\mathbf{s}, \mathbf{s}, \ldots).$$

En general, los resultados serán todas las sucesiones de águilas y soles del tipo de:

$$(\underbrace{\mathbf{s}, \ldots, \mathbf{s}}_{\mathbf{k}-1}, \mathbf{a}, .) .$$



El evento consistente en que haya que esperar **k** volados antes de que caiga la primera águila se representa mediante el conjunto $\mathbf{A}_k$, cuyos elementos son del tipo de:

$$(\underbrace{\mathbf{s}, \ldots, \mathbf{s}}_{\mathbf{k}-1}, \mathbf{a}, .) .$$

Una vez especificado el espacio de resultados Ω, supóngase que se ha dado un álgebra de eventos $\mathcal{a}$; más aún, supóngase que:

$$\mathbf{A}_k \in \mathcal{a}$$

para cualquiera que sea **k.**

Reflexione ¿Cuál es la probabilidad de que haya que esperar diez o más volados hasta que caiga la primera águila?

El evento en cuestión es:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{10} \cup \mathbf{A}_{11} \cup \mathbf{A}_{12} \cup \ldots$$

Note que **A** es una unión **infinita** de eventos. Queremos calcular **P (A).**

Pues sucede que no podemos asegurar que **A** sea un evento, ya que $\mathcal{a}$ es cerrada bajo uniones **finitas** y no necesariamente bajo uniones infinitas.

Esto está muy mal, pues puede ser que **P (A)** no esté definida.

Por razones técnicas que tienen que ver con este tipo de dificultades, se acostumbra pedir que en un espacio probabilístico

$$< \Omega, \mathcal{a}, \mathbf{P} >$$

$\mathcal{a}$ sea cerrada bajo la formación de **uniones infinitas numerables;** es decir,

1. $\phi \in \mathcal{a}$.
2. $\mathbf{A} \in \mathcal{a} \Rightarrow \mathbf{A}^c \in \mathcal{a}$.
3. $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots \in \mathcal{a} \Rightarrow \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \ldots \in \mathcal{a}$.

Una familia de conjuntos $\mathcal{a}$ que tenga estas tres propiedades **se llama una σ-álgebra.**

Por cierto, toda σ-álgebra es automáticamente un álgebra booleana, ya que si **A, B,** $\in \mathcal{a}$ por 1 se tiene que:

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \phi, \phi, \ldots \in \mathcal{a}$

y, entonces,

$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \phi \cup \phi \cup \ldots = \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \in \mathcal{a}$.

Pero en este contexto más amplio ya se puede pensar en calcular probabilidades de uniones de eventos como:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}_n.$$

Para ello, se generaliza la aditividad de **P** pidiendo en su lugar que:

si $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$ es una familia de eventos ajenos por parejas, es decir,

$$\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j = \phi \text{ si } \mathbf{i} \neq \mathbf{j},$$

entonces,

$\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \ldots) = \mathbf{P}(\mathbf{A}_1) + \mathbf{P}(\mathbf{A}_2) + \ldots$

Esta propiedad se llama **σ-aditividad** de **P.**

Se dice entonces que una probabilidad es una función:

$\mathbf{P} : \mathcal{a} \rightarrow [0, 1]$, con $\mathcal{a}$ σ-álgebra y tal que:

Propiedades de la probabilidad

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.
2. $\mathbf{P}$ es σ-aditiva.

Por cierto, si $\mathbf{P}$ es σ-aditiva es necesariamente aditiva, ya que si $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \phi$, entonces la familia

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \phi, \phi, \ldots$$

consta de eventos ajenos por parejas y su unión es $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, de acuerdo con lo que ya hemos visto.

Entonces,

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}) + \mathbf{P}(\phi) + \mathbf{P}(\phi) + \ldots;$$

Sólo falta probar que:

$$\mathbf{P}(\phi) = 0.$$

Pero esto es muy fácil, dado que:

$$\phi = \phi \cup \phi \cup \ldots,$$

debe tenerse que:

$$\mathbf{P}(\phi) = \mathbf{P}(\phi) + \mathbf{P}(\phi) + \ldots,$$

lo que es imposible a no ser que:

$$\mathbf{P}(\phi) = 0.$$

Concluyendo

Se ve, pues, que este concepto de espacio probabilístico generaliza el que hemos venido manejando, pero que todos los conceptos que hemos visto continúan siendo válidos.

No haremos ninguna referencia adicional a esto en lo que resta del paquete de Probabilidad y Estadística.

EJERCICIOS DE APLICACION

Estos ejercicios han sido preparados para que usted aplique lo que aprendió. Realícelos, le ayudarán a reafirmar sus conocimientos. Si tiene alguna duda, consulte a su asesor.

N.B.

La manera de comprobar la exactitud de sus respuestas es comparándolas con el contenido incluido en el texto y/o comentándolas con su asesor.

1. Investigue en la bibliografía sugerida o en la que usted considere conveniente, la relación que existe entre las diferentes interpretaciones de la probabilidad (frecuencial, laplaciana y subjetivista).

2. Redacte un ensayo breve (dos cuartillas), acerca de la relación entre la lógica y la probabilidad, centrándose en la idea de que el valor numérico de la probabilidad asociada a un evento dado corresponde a su valor de verdad en el cálculo proposicional.

3. Considere la situación descrita en el ejercicio 4 de la secuencia anterior. A cada evento elemental del tipo de:

$$\{\mathbf{as} \ldots \mathbf{asaa}\} \text{ o } \{\mathbf{sa} \ldots \mathbf{sass}\}$$

asígnele probabilidad $1/2^{n-1}$, donde **n** es el número de volados que se lanzaron. ¿Cuál es la probabilidad de terminar el experimento antes del sexto volado?

4. Para la misma situación del ejercicio anterior, calcule la probabilidad de terminar el experimento antes del 6o. volado o después del 4o., pero no más allá del 10o. volado. **Sugerencia:** use la fórmula para la probabilidad de una unión de eventos **que no son necesariamente ajenos.**

Después de haber realizado los ejercicios, usted podrá afirmar su aprendizaje. Lo que no haya sido muy claro o no haya podido captar perfectamente, coméntelo con su asesor.

N.B.

SUGERENCIAS DE ESTUDIO

Para ampliar su información se sugiere que:

- Consulte los siguientes libros:

  FELLER, WILLIAM, **An Introduction to Probability Theory and its Applications,** Vol. 1, New York, Edit. John Wiley & Sons, 1968, cap. I.

  FRECHET, MAURICE, **Las matemáticas y lo concreto,** México, UNAM, 1958, 2a. parte, (Colec. Problemas Científicos y Filosóficos, 10).

- Vea el telemódulo: **Construcción del modelo.**

AUTOEVALUACION

CUBRA CON LA SOLAPA DEL FORRO
ESTA AREA DE RESPUESTAS
Y LEVANTELA
CADA VEZ QUE QUIERA COMPROBAR
LA RESPUESTA CORRECTA.

Ahora que ha terminado el estudio de la unidad, evalúe sus conocimientos. Esto le ayudará a prepararse para la evaluación final del Módulo. Siga las instrucciones.

Instrucciones

Lea cuidadosamente la pregunta o la proposición inicial. Después de cada una de ellas hay afirmaciones que las complementan. Seleccione la **mejor respuesta** y rellene con lápiz el espacio inferior correspondiente a la letra que seleccionó como respuesta.

Usted debió haber marcado el espacio debajo de la letra:

Ejemplo:

En el desarrollo de la ciencia, los factores sociales imperantes:

a b c d
II ▮ II II

a. Están relacionados muy levemente.

b. Lo afectan directamente.

c. No tienen nada que ver.

d. A veces son importantes.

b

1. Según Huyghens (y nosotros también) si un jugador tiene probabilidad **p** de ganar una cantidad **a** y probabilidad **q** de ganar una cantidad **b,** entonces su ganancia esperada es:

a b c d
II II II II

a. $\mathbf{pa - q^b}$.

b. $\mathbf{(a + b)/(p + q)}$.

c. $\mathbf{pa + qb}$.

d. $\mathbf{qp + a + b}$.

c

2. En su *Théorie Analytique des Probabilités* publicada en 1812, sintetizó el desarrollo de la probabilidad hasta la época de la Ilustración el matemático:

a b c d
II II II II

a. De Moivre.

b. Lagrang.

c. Newton.

d. Laplace.

d

a

3. En 1934 Kolmogoroff culminó con los esfuerzos de varios autores al proponer:

a b c d
II II II II

   a. El espacio probabilístico como modelo matemático de los hechos del azar.

   b. El concepto de esperanza matemática.

   c. La ley de los grandes números.

   d. La teoría de los intervalos de confianza.

c

4. El enfoque laplaciano con respecto a la asignación de probabilidades o equiprobabilidad consiste en:

a b c d
II II II II

   a. Asignar a cada resultado la mitad de la probabilidad del resultado anterior.

   b. No hacer ninguna hipótesis *a priori* acerca de la probabilidad de un evento.

   c. Asignar a cada resultado la misma probabilidad.

   d. Suponer que todos los resultados son iguales.

b

5. La equiprobabilidad requiere que:

a b c d
II II II II

   a. Sólo haya un número finito de resultados favorables.

   b. Sólo haya un número finito de resultados .

   c. No se dé ningún resultado.

   d. Todos los resultados sean iguales.

6. Dos conjuntos tienen el mismo número de elementos si:

a b c d
|| || || ||

c

a. Son iguales.

b. Sus elementos son de la misma naturaleza.

c. Los elementos del primer conjunto se pueden poner en correspondencia biunívoca con los del segundo.

d. No hay manera de distinguir entre los dos.

7. Se especifica un modelo probabilístico discreto cuando se da el conjunto de resultados y se asigna a cada uno de ellos:

a b c d
|| || || ||

b

a. Un valor.

b. Una probabilidad.

c. Un color.

d. Un peso.

8. Al medir la temperatura del cuerpo humano en principio ésta puede tomar:

a b c d
|| || || ||

b

a. Todos los valores.

b. Una infinidad de valores.

c. Sólo dos valores.

d. Cualquier valor que no sea 100.

9. Los eventos elementales son aquellos que:

a b c d
|| || || ||

a

a. Constan de un sólo resultado.

b. Son muy sencillos.

c. Se ven al principio del curso.

d. No son muy importantes.

c 10. Un evento imposible es aquel que: a b c d

a. Consta de aquellos resultados que son indeseables.

b. Consta de resultados que no nos gustan.

c. Consta de resultados en principio concebibles, pero que convenimos en que no se dan, y se representa mediante el conjunto vacío.

d. Es difícil que ocurra.

d 11. En el modelo que construimos en la secuencia 3 para un experimento, los eventos fueron representados mediante: a b c d

a. Elementos.

b. Complementos y uniones.

c. Parejas de elementos.

d. Subconjuntos del espacio de resultados.

c 12. La frecuencia relativa de un evento es: a b c d

a. El número de veces que se observa.

b. El número de veces que lo anotamos.

c. El cociente del número de veces que ocurre dicho evento entre el número de repeticiones del experimento.

d. Un número irracional.

a 13. Al evento seguro se le asigna probabilidad: a b c d

a. 1.

b. 0.5.

c. Igual a la de los demás.

d. De manera inconsciente.

14. La probabilidad del complemento de **A** se calcula mediante la expresión:

a. $1 + \mathbf{P}(\mathbf{A})$.

b. $1 - \mathbf{P}(\mathbf{A})$.

c. $\mathbf{P}(\mathbf{A})^2$.

d. $\mathbf{P}(\mathbf{A})$.

a b c d
|| || || ||

b

15. Si dos eventos **A** y **B** guardan la relación $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, entonces:

a. $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{P}(\mathbf{B}) - 0.5$.

b. $\mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}) = 1$.

c. $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{P}(\mathbf{B}^c)$.

d. $\mathbf{P}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{P}(\mathbf{B})$.

a b c d
|| || || ||

d

Sume las respuestas:

¿Cuántos puntos alcanzó?

- Correctas: __________
- Incorrectas: __________

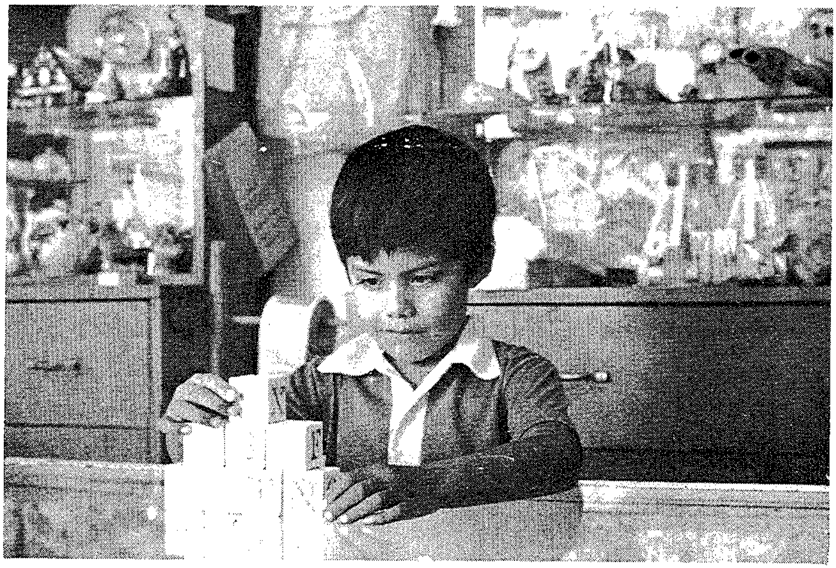
Verifique su capacidad de aprendizaje:

Excelente:	14 a 15
Muy bien:	12 a 13
Bien:	10 a 11
Regular:	9
No acreditado:	1 a 8

Si su resultado es **no acreditado,** no se desanime. Compare las respuestas que no acertó. Considere si realmente no sabía o fue problema de interpretación de la pregunta. Reflexione, analice, trate de determinar la razón de su deficiente aprendizaje o consulte con su asesor.

UNIDAD 2

ENRIQUECIMIENTO DEL MODELO

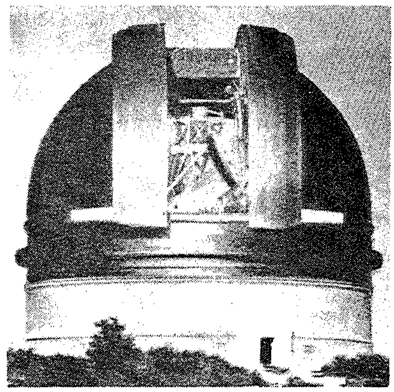


SECUENCIAS	OBJETIVOS
	Al finalizar el estudio de esta unidad, usted podrá:
1. Probabilidad condicional.	1.1 Aplicar el concepto de probabilidad condicional en conjunto con las propiedades básicas de la función de probabilidad, en la solución de diversos problemas.
2. Independencia de eventos.	2.1 Aplicar el concepto de independencia de eventos en la construcción del espacio de probabilidad para n ensayos de Bernoulli.
3. Variables aleatorias.	3.1 Comprender el concepto de distribución de una variable aleatoria.
	3.2 Aplicar el concepto de una variable aleatoria en las distribuciones binominal e hipergeométrica.
4. Valor esperado.	4.1 Comprender el concepto de valor esperado.
	4.2 Aplicar el concepto de valor esperado en diversos problemas.

Secuencia 1

Probabilidad condicional

Ideas preliminares



Al efectuar predicciones sobre el estado del tiempo, los meteorólogos usan expresiones tales como: existe una probabilidad del 80% de que llueva el 20 de julio de 1978, o bien, existe una probabilidad de 0.8 de que llueva mañana.

Al decir esto, los meteorólogos generalmente están situados en la víspera y el significado de esta frase; tal y como quedó establecido en la primera unidad de este Módulo, es que en situaciones **similares** a las observadas en el presente día (19 de julio de 1978) comúnmente llueve al día siguiente con una frecuencia de 8 en cada 10 casos.

Ellos, para emitir esta declaración comparan las observaciones del 19 de julio de 1978 con las observaciones de días **similares** que tienen en su registro de observaciones.

Es claro que la declaración depende del periodo de comparación y del criterio de similtud usado; con base en ello, los meteorólogos usan el criterio frecuencial para efectuar la predicción sobre el estado del tiempo para el día siguiente. No es difícil imaginar que si el periodo de observaciones con que cuenta la estación meteorológica fuese mayor o menor, entonces, también sería diferente la declaración emitida, como: hay una probabilidad de 0.85 de que llueva mañana.

En general, tiene sentido preguntar por la probabilidad de la ocurrencia de un evento **A**, solamente si se especifican de antemano las condiciones bajo las cuales el evento **A** puede o no ocurrir y que el valor de la probabilidad de su ocurrencia esencialmente dependa de esas condiciones. **En realidad, toda probabilidad es una probabilidad condicional;** en la primera unidad de este Módulo, cuando hablamos de la probabilidad de un evento **A,** hicimos referencia tácita al evento seguro Ω; es decir, dimos por establecido que el evento (seguro) Ω ya había ocurrido; en otras palabras, hablamos de la **probabilidad condicional** de la ocurrencia del evento **A,** dado que el evento Ω ocurrió.

Probabilidad condicional

En muchos casos es necesario calcular la probabilidad de un evento **A,** dado que otro evento **B** ya ha ocurrido. A este tipo de probabilidad se le conoce con el nombre de **probabilidad condicional** y la denotamos por el símbolo:

$P(A \mid B)$

Supongamos que en una oficina hay 12 hombres y 8 mujeres, de los cuales 7 hombres y 4 mujeres tienen automóvil; una persona saldrá al azar. Supongamos también, que usted se encuentra a la salida de esta oficina.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona que va a salir posea un automóvil?

b. ¿Si usted la ve salir y ve que es mujer, cuál es la probabilidad de que posea un automóvil?

Intuitivamente usted respondería que en (**a**), la probabilidad es 11/20 y en (**b**), dado que usted vio que era mujer y por el hecho de que cada una de ellas puede salir con la misma probabilidad, la probabilidad es 4/8. Si se denota por **B** al evento **la persona que saldrá es mujer** y por **A** al evento **la persona que saldrá posee un automóvil,** entonces en símbolos estas respuestas se pueden escribir como sigue:

$$\mathbf{P}\,(\mathbf{A}) = 11/20 \text{ y } \mathbf{P}\,(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) = 4/8.$$

En sentido estricto, aún las probabilidades no condicionadas son también condicionales, ya que la teoría supone siempre un conjunto de condiciones.

Con el objeto de motivar la definición de **probabilidad condicional,** consideremos el caso de un experimento con **n** resultados equiprobables; tomemos dos eventos **A** y **B**. El número de resultados favorables simultáneamente a **A** y a **B,** lo denotamos por $^{n}(A \cap B)$, en tanto que aquellos favorables a **B** son $^{n}\mathbf{B}$. Entonces, resulta natural en esta interpretación tomar a

$$\frac{^{n}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{^{n}\mathbf{B}}$$

como la probabilidad condicional de la ocurrencia del evento **A.**

Si además se observa que para el caso equiparable se cumple que:

$$\frac{^{n}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{^{n}\mathbf{B}} = \frac{^{n}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})/\mathbf{n}}{^{n}\mathbf{B}/\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{\mathbf{P}(\mathbf{B})}$$

Entonces, resulta natural dar para el caso general la siguiente definición:

Definición de probabilidad condicional

La probabilidad de que un evento A **ocurra dado que otro** B **ha ocurrido es:**

$$P(A \mid B) = \begin{cases} \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} & \textbf{si } P(B) > 0 \\ \textbf{o si } P(B) = 0 \end{cases}$$

Observe

Despejando al término **P (A ∩ B)** en el primer renglón (o sea para el caso en que **P (B)** $>$ 0)

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{B})\,\mathbf{P}(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$$

si **P (B)** = 0; entonces, por definición **P (A | B)** = **0** y también se satisface esta igualdad.

Es decir, la probabilidad de que ocurran simultáneamente o sucesivamente los eventos **A** y **B,** es igual a la probabilidad de que ocurra el evento B multiplicado por la probabilidad condicional de que ocurra el evento **A,** dado que **B** ya ocurrió.

En el ejemplo que nos está motivando,

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \frac{4}{20} \text{ y } \mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{8}{20},$$

Ejemplos se lanza un par de dados al aire. Suponiendo que todos los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrir:

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener ocho puntos, sabiendo que se obtuvo un número par de puntos?
- Si denominamos **A** al evento **se obtienen ocho puntos.**
- Si denominamos **B** al evento **se obtiene un número par.**

Entonces, estas preguntas se pueden formular por medio de los siguientes símbolos:

a. $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = ?.$

b. $\mathbf{P}(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) = ?.$

La siguiente tabla contiene todos los resultados posibles del experimento citado.

(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

En total hay 36 resultados posibles y cada uno de ellos tiene una probabilidad de ocurrir de 1/36, el evento **A** se presenta cuando ocurre alguno de los resultados elementales de la siguiente lista:

(2,6)

(3,5)

(4,4)

(5,3)

(6,2)

Es decir:

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

Si el evento **B** ocurrió, entonces, uno de los siguientes 18 resultados, aconteció:

(1,1)		(3,1)		(5,1)	
	(2,2)		(4,2)		(6,2)
(1,3)		(3,3)		(5,3)	
	(2,4)		(4,4)		(6,4)
(1,5)		(3,5)		(5,5)	
	(2,6)		(4,6)		(6,6)

por lo que $P(A \mid B) = \frac{5}{18}$,

ya que todos los resultados de este subgrupo tiene la misma probabilidad de ocurrir.

Contando de la primera tabla los resultados elementales que indican la ocurrencia de los eventos **B** y **A ∩ B** respectivamente, se obtiene que:

$$P(B) = \frac{18}{36}$$

y

$$P(A \cap B) = \frac{5}{36}$$

Así se confirma la igualdad que aparece en la definición mencionada líneas arriba.

Es decir:

$$\mathbf{P}\,(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) = \frac{5}{18} = \frac{5/36}{18/36} = \frac{\mathbf{P}\,(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{\mathbf{P}\,(\mathbf{B})}.$$

Una manera alternativa de calcular $\mathbf{P}\,(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$ es utilizando la fórmula:

$$\mathbf{P}\,(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{P}\,(\mathbf{B})\,\mathbf{P}\,(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) = \frac{18}{36} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{36}.$$

Para dos eventos **A** y **B** cualesquiera, ya que $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{B} \cap \mathbf{A}$ siempre se tiene que :

Regla de multiplicación para 2 eventos

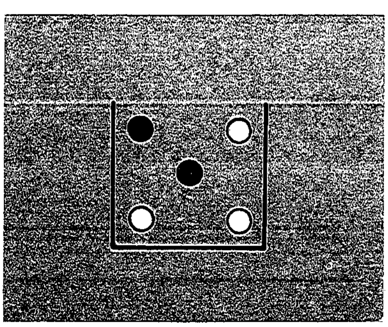
$$\boxed{\mathbf{P}\,(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{P}\,(\mathbf{B})\,\mathbf{P}\,(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) = \mathbf{P}\,(\mathbf{A})\,\mathbf{P}\,(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})}$$

Es decir:

La probabilidad de que dos eventos ocurran simultáneamente o sucesivamente, es igual al producto de la probabilidad de ocurrencia de uno de ellos, por la probabilidad condicional de la ocurrencia del otro evento, dado que el primero ya ocurrió.

Ejemplo

Veamos el siguiente ejemplo.



De una urna que contiene 3 bolas blancas y 2 negras se extraen, sucesivamente al azar y sin reemplazo, dos bolas.

Sea:

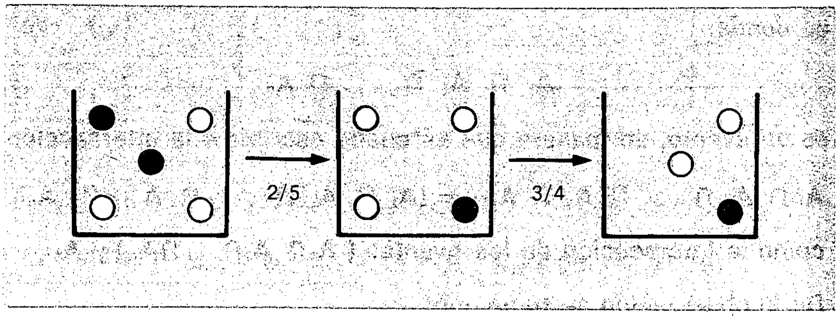
- $\mathbf{N}_1$ el evento **la primera bola es negra.**
- $\mathbf{B}_2$ el evento **la segunda bola es blanca.**

Un método para calcular la probabilidad de ocurrencia del evento

$\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{B}_2$ es el siguiente:

La probabilidad de extraer una bola negra por primera vez es igual a 2/5; para la segunda extracción se tiene una bola negra y tres bolas blancas.

Por lo tanto, la probabilidad de que la segunda bola sea blanca es igual a 3/4,



usando la fórmula:

$$\mathbf{P}(\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{B}_2) = \mathbf{P}(\mathbf{N}_1)\,\mathbf{P}(\mathbf{B}_2 \mid \mathbf{N}_1),$$

se encuentra que:

$$\mathbf{P}(\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{B}_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}.$$

Regla de la multiplicación para más de dos eventos

La regla de multiplicación de dos eventos se extiende a tres o más eventos mediante la siguiente expresión:

Dada una n — ada **cualquiera de eventos** $A_1, A_2 \ldots, A_n$ **se tiene que**

$P(A_1 \cap A_2 \quad \ldots \cap A_n) = P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1)$

$P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ \ldots \cap A_{n-1})$

La demostración de la regla de la multiplicación es una aplicación del principio de inducción que se vio en el Módulo 10 de Matemáticas.

Demostración

Por la observación anterior tenemos que para el caso de dos eventos $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$:

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2) = \mathbf{P}(\mathbf{A}_1)\,\mathbf{P}(\mathbf{A}_2 \mid \mathbf{A}_1).$$

Supongamos (hipótesis de inducción) que la regla de multiplicación es válida para **n** eventos; ahora procedamos a demostrar su validez para:

$\mathbf{n} + 1$ eventos. Digamos:

$$\mathbf{A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}}$$

en donde:

$$\mathbf{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n}$$

es un evento, de manera que se puede escribir a la intersección.

$$\mathbf{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1} = (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cap A_{n+1}}$$

como la intersección de los eventos $(\mathbf{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n})$ y $\mathbf{A_{n+1}}$.

De la observación se tiene que:

$$P(\mathbf{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}}) = P(\mathbf{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n})$$
$$P(\mathbf{A_{n+1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n})$$

y por la hipótesis de inducción:

$$P(\mathbf{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n}) = P(\mathbf{A_1})\, P(\mathbf{A_2 \mid A_1})\, P(\mathbf{A_3 \mid A_1 \cap A_2})$$
$$\ldots P(\mathbf{A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}).$$

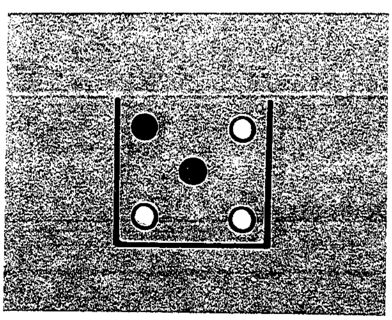
De manera que si se combinan las dos últimas igualdades se obtiene que:

$$\mathbf{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n+1}) = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1).}$$
$$\mathbf{P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots P(A_{n+1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).}$$

y con lo cual queda terminada la demostración.

Ejemplo

De una urna que contiene dos bolas negras y tres blancas se extraen sucesivamente al azar y sin reemplazo tres bolas.

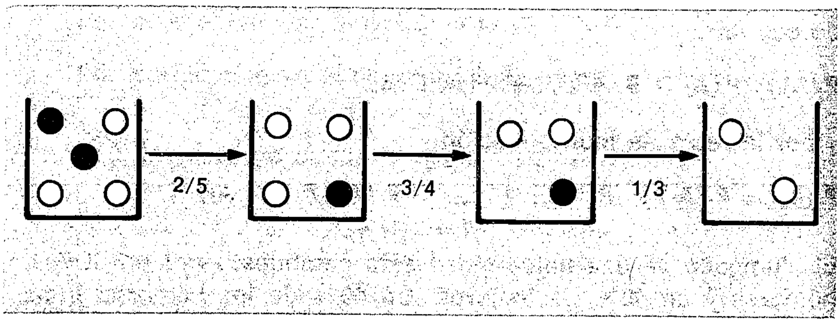


¿Cuál es la probabilidad de obtener la primera bola negra, la segunda blanca y la tercera negra?

Sea:

- $\mathbf{N_1}$ el evento **la primera bola es negra.**
- $\mathbf{B_2}$ el evento **la segunda bola es blanca.**
- $\mathbf{N_3}$ el evento **la tercera bola es negra.**

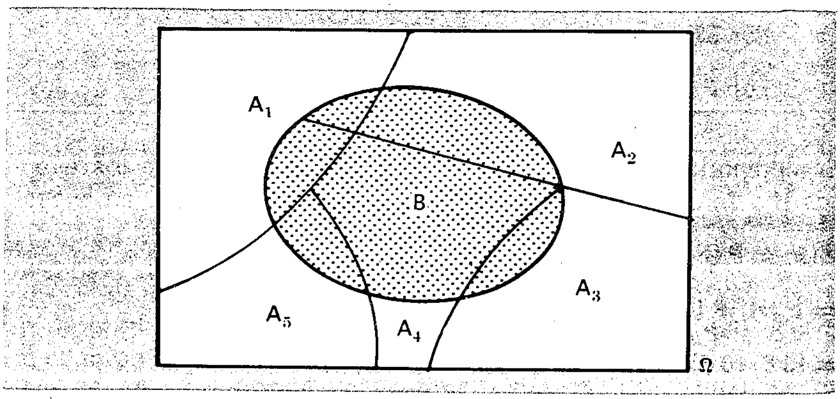
La siguiente figura ilustra las transiciones necesarias y suficientes para que ocurra el evento y el cálculo para la ocurrencia del mismo se efectúa mediante la regla de multiplicación.



$$P(N_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(N_1)\,P(B_2 \mid N_1)\,P(N_3 \mid N_1 \cap B_2)$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}.$$

Para otra aplicación de la regla de la multiplicación considere la siguiente figura:



Esta figura representa un evento **B** y **una partición del evento seguro** Ω por medio de los cinco eventos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, $\mathbf{A_4}$ **y** $\mathbf{A_5}$. Al decir que estos últimos conforman una partición del evento seguro Ω, se está diciendo que éstos cumplen con las siguientes propiedades:

1. $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$.

2. Para cualesquiera dos subíndices **i, j** del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ con $i \neq j$, se tiene que $A_i \cap A_j = \phi$; es decir, que A_i y A_j son eventos mutuamente excluyentes.

También se tiene:

$\mathbf{B} = (\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A}_3 \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A}_4 \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A}_5 \cap \mathbf{B})$.

Por la propiedad aditiva de la función de probabilidad **P**, se puede escribir:

$\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{B}) + \ldots + \mathbf{P}(\mathbf{A}_5 \cap \mathbf{B})$

y por la regla de multiplicación:

$\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}_1)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}_1) + \ldots + \mathbf{P}(\mathbf{A}_5)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}_5)$.

Ejemplo

El alumnado de una universidad está compuesto por un 60% de hombres y un 40% de mujeres. Un 40% de los hombres fuman y un 60% de las mujeres fuman.

¿Cuál es la probabilidad de que un alumno que haya sido escogido al azar fume?

Para formular y contestar a esta pregunta, denótese:

- Por **H** al evento **el alumno llamado es hombre.**
- Por **M** al evento **el alumno llamado es mujer.**
- Por **F** al evento **el alumno llamado fuma.**

El alumno llamado o es hombre o es mujer, por lo que los eventos **H** y **M** conforman una partición del evento seguro, entonces:

$\mathbf{P}(\mathbf{F}) = \mathbf{P}(\mathbf{F} \cap \mathbf{H}) + \mathbf{P}(\mathbf{F} \cap \mathbf{M})$

$= \mathbf{P}(\mathbf{H})\,\mathbf{P}(\mathbf{F} \mid \mathbf{H}) + \mathbf{P}(\mathbf{M})\,\mathbf{P}(\mathbf{F} \mid \mathbf{M})$

$= (0.6)(0.4) + (0.4)(0.6) = 0.48.$

Ejemplo

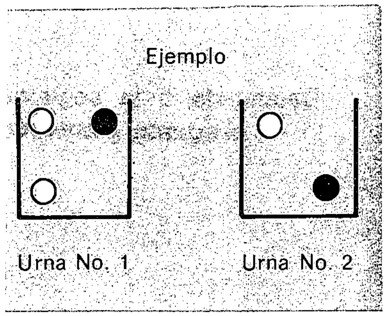
Veamos otro ejemplo.

Se lanzará un dado que tiene probabilidad 1/6 de caer en cada cara. Si el número que resulta es par, entonces se tomará una bola al azar de la urna núm. 1 que contiene dos bolas blancas y una negra. Si el número que resulte es impar, entonces se tomará una bola al azar de la urna núm. 2 que contiene una bola blanca y una negra.

¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola negra?

Si se denota:

- Por A_1 al evento **se selecciona la urna núm. 1.**
- Por A_2 al evento **se selecciona la urna núm. 2.**
- Por N al evento **se obtiene una bola negra.**



Entonces, la pregunta queda formulada por:

$$P(N) = ?$$

y la respuesta es:

$$P(N) = P(A_1)\,P(N \mid A_1) + P(A_2)\,P(N \mid A_2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12} = 0.42.$$

Con la definición de probabilidad condicional y las propiedades de la función de probabilidad vistas hasta ahora, se pueden plantear y resolver una multitud de problemas.

Piense en el penúltimo ejemplo y conteste las siguientes preguntas:

¿Cuál es la probabilidad de que un alumno que fume, y haya sido escogido al azar, sea hombre?

¿Cuál es la probabilidad de que un alumno que fume, y haya sido escogido al azar, sea mujer?

En la primera pregunta se plantea la probabilidad de que ocurra el evento **H,** dado que el evento **F** ya ocurrió; es decir:

$$P(H \mid F) = ?$$

Respuesta a la primera pregunta planteada

La respuesta a la primera pregunta es:

$$P(H \mid F) = \frac{P(H \cap F)}{P(F)} = \frac{P(H)\,P(F \mid H)}{P(H)\,P(F \mid H) + P(M)\,P(F \mid M)}$$

$$= \frac{(0.6)\,(0.4)}{(0.6)\,(0.4) + (0.4)\,(0.6)} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

La respuesta de la segunda pregunta es:

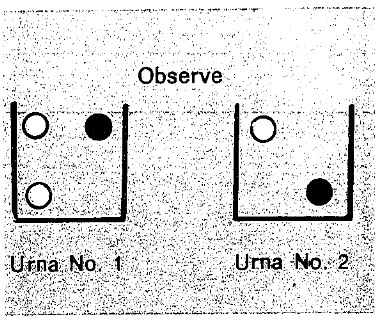
Respuesta a la segunda pregunta planteada

$$P(M \mid F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{P(M)\,P(F \mid M)}{P(H)\,P(F \mid H) + P(M)\,P(F \mid M)}$$

$$= \frac{(0.4)\ (0.6)}{(0.6)\,(0.4) + (0.4)\,(0.6)} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Observe

En el experimento del lanzamiento del dado y la selección al azar de una bola de la urna número 1 o la urna número 2 según el caso, solamente se le informará a usted el color de la bola y deberá decidir de qué urna fue sacada.



Reflexione

¿Qué decidiría usted si el color de la bola fuera negra?

¿Y si fuera blanca? ¿por qué?

Ya que se le informara el color de la bola, para decidir adecuadamente hay que calcular primero las siguientes probabilidades:

$$P(A_1 \mid N),\ P(A_2 \mid N),\ P(A_1 \mid B) \text{ y } P(A_2 \mid B),$$

en donde **B** denota al evento **se obtiene una bola blanca** y los eventos A_1, A_2, **N** ya fueron definidos en la resolución del mismo ejemplo al que nos estamos refiriendo.

$$P(A_1 \mid N) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$$

$$P(A_2 \mid N) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5},$$

de manera que si el color de la bola es negro, se decide que la urna número 2 fue seleccionada, ya que es la que tiene mayor probabilidad de haber sido elegida.

Para el caso de bola blanca calcule primero:

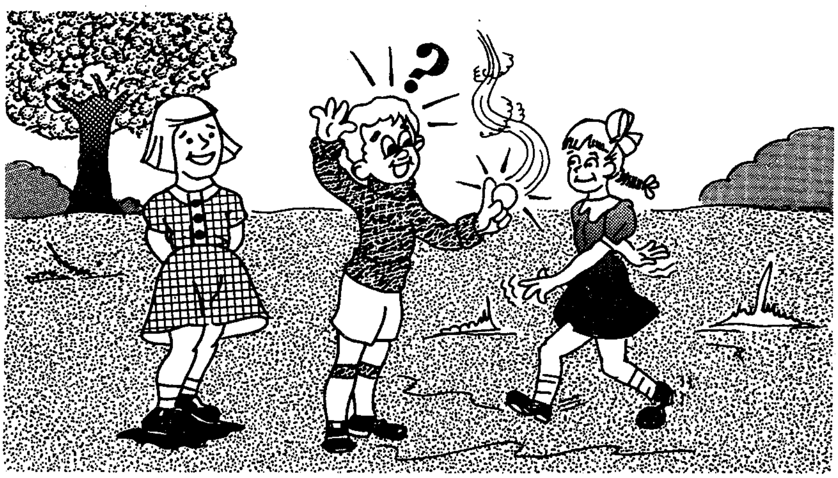
$$P(B) = P(A_1)\,P(B \mid A_1) + P(A_2)\,P(B \mid A_2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

$$P(A_1 \mid B) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{7}{12}} = \frac{4}{7}$$

$$P(A_2 \mid B) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{7}$$

Si el color de la bola es blanco, entonces se decide que la urna número 1 fue seleccionada.



EJERCICIOS DE APLICACION

N.B. Estos ejercicios han sido preparados para que usted aplique lo que aprendió. Realícelos, le ayudarán a reafirmar sus conocimientos. Si tiene alguna duda, consulte a su asesor.

CUBRA CON LA SOLAPA DEL FORRO ESTA AREA DE RESPUESTAS Y LEVANTELA CADA VEZ QUE QUIERA COMPROBAR LA RESPUESTA CORRECTA.

1. Considere a un conjunto de familias con dos niños y suponga que en cada parto hay la misma probabilidad de que nazca un niño del sexo masculino o del femenino.

   ¿Cuál es la probabilidad de que los dos sean niños varones, dado que: (i) el niño mayor es varón, (ii) por lo menos uno de los dos es varón?

   Sea:

   - **A** el evento "el niño mayor es varón".
   - **B** el evento "el niño menor es varón".

   Use la relación:

   $$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}.$$

   En dos partos hay cuatro resultados elementales posibles y cada uno tiene la misma probabilidad de ocurrir, use las relaciones:

   $$\mathbf{P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)}$$

   $$\mathbf{P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)}$$

   - $\mathbf{A \cap B}$ es el evento "el primer niño es varón y el segundo es varón".
   - $\mathbf{A \cap B^c}$ es el evento "el primer niño es varón y el segundo es niña".

2. Una persona lanza al aire dos monedas.

   ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga dos águilas, dado que por lo menos obtiene una águila? Hay cuatro resultados elementales posibles, suponga que cada uno de ellos tiene igual probabilidad de ocurrir.

1. (i) $\mathbf{P(A \cap B \mid A)} =$

$$\frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(A)}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

1. (ii). $\mathbf{P(A \cap B \mid A \cup B)}$

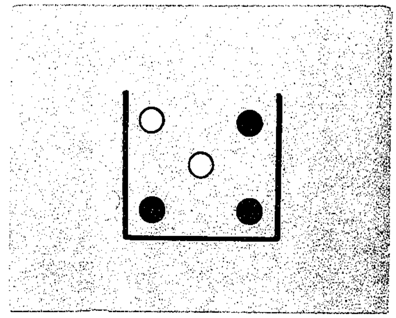
$$= \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(A \cup B)}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

2. $\frac{1}{3}$

3. Una urna contiene 3 bolas negras y 2 blancas. Se sacan al azar y sin reemplazo 2 bolas sin anotar su color.

   (i) Se saca al azar otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

   (ii) Si la tercera bola extraída resulta ser blanca, cuál es la probabilidad: que no se haya obtenido ninguna bola blanca en las primeras dos extracciones o que se haya obtenido una bola blanca.

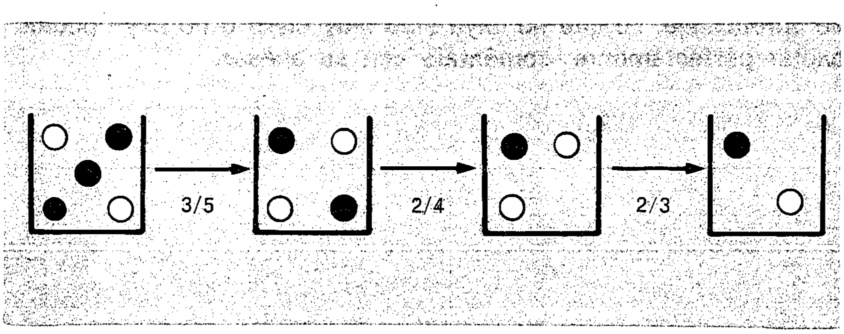


Sean:

- $\mathbf{A}_i$ el evento "en las primeras dos extracciones resultaron **i** bolas blancas".
- $\mathbf{B}_j$ el evento "en la jotaésima extracción se obtiene una bola blanca".
- $\mathbf{N}_j$ el evento "en la jotaésima extracción se obtiene una bola negra".

El evento $\mathbf{A}_0 \cap \mathbf{B}_3$: "en las dos primeras extracciones no se obtienen bolas blancas y en la tercera se obtiene bola blanca", también se puede expresar por medio de:

$$\mathbf{A}_0 \cap \mathbf{B}_3 = \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2 \cap \mathbf{B}_3$$



De manera similar:

$$\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{B}_3 = (\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{N}_2 \cap \mathbf{B}_3) \cup (\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{B}_2 \cap \mathbf{B}_3)$$

3. (i) $\mathbf{P}(\mathbf{B}_3) = \mathbf{P}(\mathbf{A}_0 \cap \mathbf{B}_3) + \mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{B}_3)$ ya que $\mathbf{P}(\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{B}_3) = 0$ por ser

$\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{B}_3$ un evento imposible de ocurrir

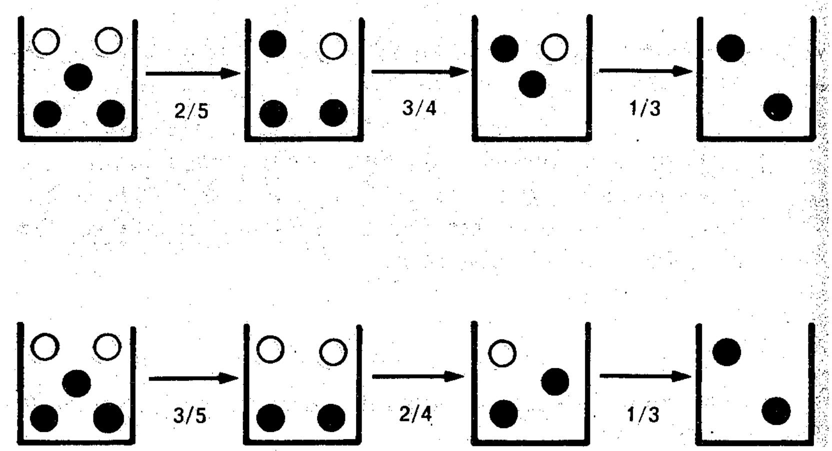
$$\mathbf{P}(\mathbf{B}_3) = \frac{2}{5}$$

3. (ii) $\mathbf{P}(\mathbf{A}_0 \mid \mathbf{B}_3) =$

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{A}_0 \cap \mathbf{B}_3)}{\mathbf{P}(\mathbf{B}_3)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{B}_3) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{B}_3)}{\mathbf{P}(\mathbf{B}_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$



4. Lance un dado varias veces y compruebe que **P (B | A)** = 1/3, donde **A** es el evento

   se obtiene un número par;

   y **B** es el evento,

   se obtiene un número menor o igual que dos.

N.B. Después de haber realizado los ejercicios, usted podrá afirmar su aprendizaje. Lo que no haya sido muy claro o no haya podido captar perfectamente, coméntelo con su asesor.

SUGERENCIAS DE ESTUDIO

Para ampliar su información se sugiere que:

- Consulte los siguientes libros:

FELLER, WILLIAM, **An Introduction to Probability Theory and its Applications**, Vol. 1, New York, Edit. John Wiley & Sons, 1968, cap. V.

HERNANDEZ LERMA, ONESIMO, **Elementos de probabilidad y estadística,** México, Edit. Fondo de Cultura Económica, 1979, cap. 2, sec. 2.3.

RUIZ MONCAYO, ALBERTO, **Introducción y métodos de probabilidad,** México, Edit. Trillas, 1973, cap. 2.

Secuencia 2

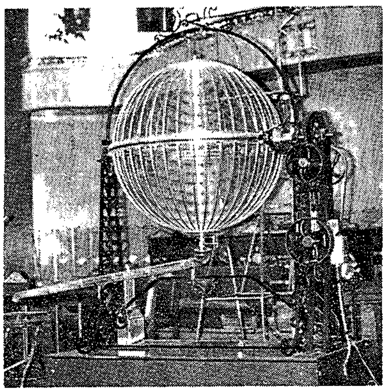
Independencia de eventos

Ideas preliminares

Si sacamos sucesivamente al azar las bolas de una urna que contiene una bola negra y una blanca y si **no reemplazamos** en la urna la primera bola, entonces podremos adivinar sin temor a equivocarnos el color de la siguiente bola. Si, por otra parte, **reemplazamos** en la urna la primera bola, estaremos de vuelta en las condiciones iniciales; es decir, no habremos ganado información acerca del posible color de la siguiente bola que se sacará al azar de la urna.

Independencia de eventos

Sean **A** y **B** dos eventos de un mismo espacio de probabilidad y suponga que **P (A)** $>$ 0, **P (B)** $>$ 0. Generalmente, la probabilidad condicional **P (A | B)** es diferente que **P (A)**.



Si P (A | B) = P (A) **entonces la ocurrencia del evento** B **no tiene influencia o no da información acerca de la ocurrencia del evento** A**; en este caso se dice que** A **es independiente de** B.

Por ejemplo, supongamos que de la urna sacamos sucesivamente al azar dos bolas y reemplazamos la primera en la urna antes de sacar la segunda; entonces si:

- **B** es el evento **la primera bola es blanca.**
- **A** es el evento **la segunda bola es negra.**

Entonces tendremos que:

$$\mathbf{P\,(A \mid B) = P\,(A)} = \frac{1}{2}.$$

Si A **es independiente de** B**, entonces** B **es independiente de** A.

Esto se puede comprobar de la siguiente manera:

$$\mathbf{P\,(B \mid A)} = \frac{\mathbf{P\,(B \cap A)}}{\mathbf{P\,(A)}} = \frac{\mathbf{P\,(B)\,P\,(A \mid B)}}{\mathbf{P\,(A)}} = \frac{\mathbf{P\,(B)\,P\,(A)}}{\mathbf{P\,(A)}} = \mathbf{P\,(B)},$$

donde la penúltima igualdad se sigue por el supuesto inicial de que **A es independiente de B.**

En ambos casos se satisface la igualdad $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{B})$, de manera que adoptaremos como la definición de independencia de eventos la siguiente:

Definición de independencia de eventos

Dos eventos A **y** B **son independiente si:**

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B).$$

Es decir, los eventos A **y** B **son independientes si la probabilidad de que ocurran** A **y** B **simultánea o sucesivamente, es igual a la probabilidad de que ocurra** A **multiplicada por la probabilidad de que ocurra** B.

Algunas consecuencias de la definición

De esta definición se sigue que cualquier evento **A** con $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = 0$ o $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = 1$, es independiente de cualquier otro evento **B**, ya que en el primer caso:

$$0 \leq \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \leq \mathbf{P}(\mathbf{A}) = 0$$

implica que:

$$0 = \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{B}) = 0$$

y en el segundo caso:

$$0 \leq \mathbf{P}(\mathbf{A}^c \cap \mathbf{B}) \leq \mathbf{P}(\mathbf{A}^c) = 1 - \mathbf{P}(\mathbf{A}) = 0,$$

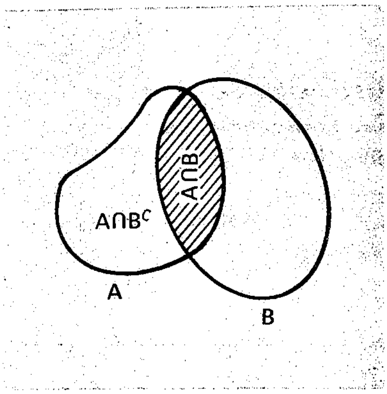
por lo que:

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + \mathbf{P}(\mathbf{A}^c \cap \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B});$$

y entonces se satisface la igualdad de la definición:

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{B}).$$

Observaciones Resulta interesante observar que si dos eventos **A** y **B** son independientes, entonces las siguientes tres parejas de eventos también son independientes:



1. **A** y **B**^{c}.
2. **A**^{c} y **B.**
3. **A**^{c} y **B**^{c}.

A continuación se demuestra la independencia de la primera pareja y se deja como ejercicio el que demuestre la independencia de las otras dos parejas.

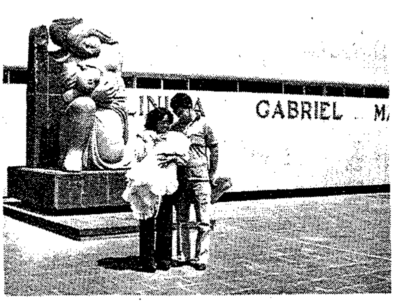
$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}^c) = \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) - \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

$$= \mathbf{P}(\mathbf{A}) - \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\,(1 - \mathbf{P}(\mathbf{B}))$$

$$= \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{B}^c).$$

Observe Como veremos en el Módulo 3, el concepto de independencia juega un papel muy importante en la teoría de probabilidad; por lo pronto, conviene indicar aquí que al modelar un espacio de probabilidad para un experimento o fenómeno aleatorio específico, se deberá tener especial cuidado al asignar probabilidades a los eventos para que, cuando se trate de parejas de eventos tales que en la práctica la ocurrencia de uno no da información acerca de la ocurrencia del otro, sean estos eventos dentro del contexto del modelo probabilístico que se construye, matemáticamente, independientes.

Así por ejemplo, cuando se construye un modelo probabilístico para el experimento que consiste en lanzar dos monedas al aire, se deberá definir la función de probabilidad de manera que los eventos: "la primera moneda cae águila" y "la segunda sol" sean independientes.



(Véase más adelante en esta secuencia, la construcción del modelo probabilístico: ensayos de Bernoulli).

De manera análoga, podemos decir, que el nacimiento de un niño varón de una madre no tiene influencia en el nacimiento de una niña de otra madre, en un modelo probabilístico que represente al experimento de nacimientos de niños; estos eventos deberán ser independientes.

Hasta este momento se ha definido el concepto de independencia probabilística para parejas de eventos y para este caso. Si, por ejemplo, **A** y **B** son independientes, la regla de multiplicación aplicada a estos eventos se simplifica de:

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A)\,P(B \mid A)}$$

a:

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A)\,P(B)},$$

y enseguida generalizamos la definición de independencia de una pareja de eventos a una terna de eventos.

Definición

Tres eventos A, B **y** C **son mutuamente independientes si:**

1. **Son independientes por parejas.**
2. **Se cumple que** $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$.

Algunas consecuencias de la definición

Cuando los tres eventos **A, B** y **C** son mutuamente independientes, la regla de multiplicación aplicada a ellos se simplifica de:

$$\mathbf{P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B \mid A)\,P(C \mid A \cap B)}$$

a la forma descrita en la parte (2) del cuadro de la definición. Además, suponiendo que los eventos **A, B, C, A ∩ B, A ∩ C** y **B ∩ C** tengan una probabilidad positiva de ocurrir, entonces se cumple que:

$$\mathbf{P(A \mid B \cap C) = P(A)}$$

$$\mathbf{P(B \mid A \cap C) = P(B)}$$

$$\mathbf{P(C \mid A \cap B) = P(C)}$$

En otras palabras, que la ocurrencia conjunta de cualquier pareja de ellos, no altera la probabilidad de ocurrencia del tercero.

La tercera igualdad se establece de la siguiente manera:

Por la parte (1) de la definición, **A** y **B** son independientes, por lo tanto $\mathbf{P(B \mid A) = P(B)}$. Al comparar la parte (2) de la definición con la regla de multiplicación aplicada a los tres eventos **A, B** y **C:**

$$\mathbf{P(A)\,P(B)\,P(C) = P(A)\,P(B \mid A)\,P(C \mid A \cap B)},$$

y bajo el supuesto de que:

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) > 0 \text{ y } \mathbf{P}(\mathbf{B}) > 0,$$

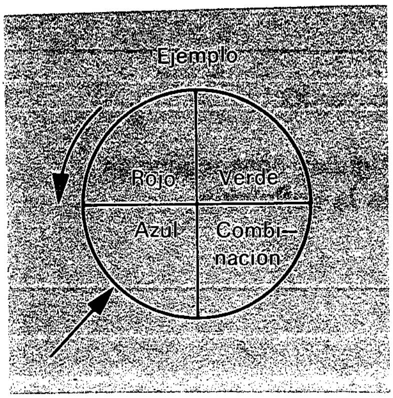
entonces:

$$\mathbf{P}(\mathbf{C}) = \mathbf{P}(\mathbf{C} \mid \mathbf{A} \cap \mathbf{B}).$$

Las primeras dos igualdades se comprueban al aplicar el mismo argumento a $\mathbf{B} \cap \mathbf{C} \cap \mathbf{A}$ y a $\mathbf{A} \cap \mathbf{C} \cap \mathbf{B}$, respectivamente.

Tres eventos pueden ser independientes por parejas y, sin embargo, no ser mutuamente independientes. El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

Ejemplo



Se pintan con colores rojo, verde, azul y la combinación de ellos a cada uno de los cuadrantes de una ruleta balanceada (o sea que cada cuadrante tiene probabilidad igual a 1/4 de ocurrir), se hace girar la ruleta y el resultado quedará señalado por la flecha indicadora.

Sean:

- **A** el evento **el cuadrante indicado contiene el color rojo.**
- **B** el evento **el cuadrante indicado contiene el color verde.**
- **C** el evento **el cuadrante indicado contiene el color azul.**

Claramente:

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{C}) = \frac{1}{2},$$

ya que cada color aparece en dos cuadrantes. Por otro lado,

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) = \mathbf{P}(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = \frac{1}{4},$$

ya que una pareja de colores solamente puede ocurrir si sale el cuadrante pintado con la combinación de los tres colores. Además,

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = \frac{1}{4}.$$

De esto se sigue que:

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A} \mid \mathbf{C}) = \mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}) = \mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{C})$$

$$= P(C \mid A) = P(C \mid B) = \frac{1}{2};$$

o sea, que los eventos **A, B** y **C** son independientes por parejas. Sin embargo:

$$P(C \mid A \cap B) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1 \neq P(C),$$

lo cual contradice una de las consecuencias de la definición arriba citada. También se comprueba directamente que no se satisface la parte (2) de esta definición:

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)\,P(B)\,P(C).$$

Ejemplo

Si 0.51 es la probabilidad de que una familia en el D.F. tenga un niño varón. ¿Cuál es la probabilidad de que en tres nacimientos haya un varón? ¿De que no haya ninguno?

Sean A_1, A_2 y A_3 los eventos:

Un niño en el primer nacimiento.

Un niño en el segundo nacimiento.

Un niño en el tercer nacimiento.

Suponiendo una independencia de nacimiento a nacimiento, para responder a la primera pregunta, notamos primero que el evento "en tres nacimientos hay un varón" se puede expresar mediante la siguiente unión ajena de eventos:

$$(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2^c \cap \mathbf{A}_3^c) \cup (\mathbf{A}_1^c \cap \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3^c) \cup (\mathbf{A}_1^c \cap \mathbf{A}_2^c \cap \mathbf{A}_3)$$

y su probabilidad de ocurrencia es:

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2^c \cap \mathbf{A}_3^c) + \mathbf{P}(\mathbf{A}_1^c \cap \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3^c) + \mathbf{P}(\mathbf{A}_1^c \cap \mathbf{A}_2^c \cap \mathbf{A}_3)$$

$$= (0.51)(0.49)(0.49) + (0.49)(0.51)(0.49) + (0.49)(0.49)(0.51) = 0.367.$$

El evento **en tres nacimientos no hay ningún varón,** se puede expresar mediante el evento $\mathbf{A}_1^c \cap \mathbf{A}_2^c \cap \mathbf{A}_3^c$ y su probabilidad de ocurrencia es:

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_1^c \cap \mathbf{A}_2^c \cap \mathbf{A}_3^c) = (0.49)^3 = 0.12.$$

Construcción del espacio de probabilidad para n ensayos de Bernoulli

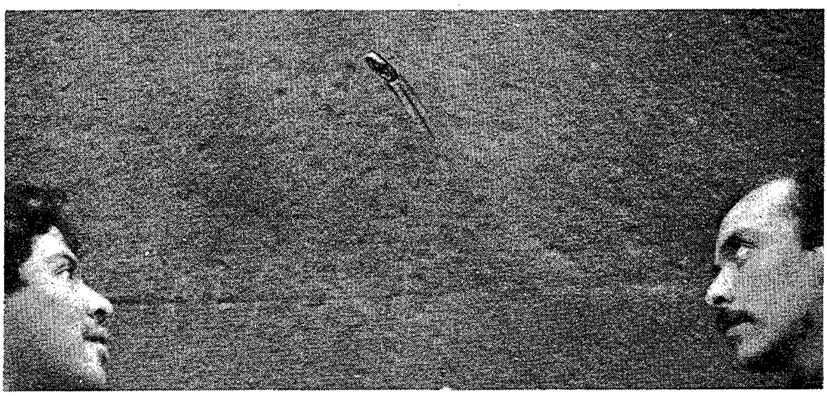
En muchos problemas de probabilidad aplicada, se involucra a repeticiones sucesivas y sin interferencias, de ensayos como: lanzamientos de dados, nacimientos, observaciones en minutos consecutivos de la emisión de partículas por una fuente radiactiva, etc.

Los resultados de cada ensayo se clasifican en dos categorías con las etiquetas de éxito y fracaso según convenga, por ejemplo: éxito si sale águila y fracaso si sale sol en el caso de lanzamientos de una moneda; éxito si se emiten menos de ocho partículas en un minuto dado y fracaso en el caso contrario para los ensayos de la emisión de partículas radiactivas.

Si denotamos con la letra **e** a la palabra éxito y con la letra **f** a la palabra fracaso, entonces podemos registrar los resultados sucesivos de una serie de ensayos mediante palabras formadas con las letras **e** y **f.**

Por ejemplo: **feffe** indica un resultado elemental de cinco ensayos, a saber:

- En el primer ensayo ocurrió un fracaso.
- En el segundo hubo éxito.
- En el tercero fracasó.
- En el cuarto fracasó.
- En el quinto hubo éxito.



En general, para n **ensayos el conjunto:**

$\Omega = \{x_1 x_2 \ldots x_n : x_i = e \text{ } \mathbf{o} \text{ } f\}$

describe el conjunto de todos los resultados elementales posibles. $x_1 x_2 \ldots x_n$ **y denota a una palabra genérica formada con las letras** e **y** f.

De acuerdo con lo dicho anteriormente en esta misma secuencia, se desea definir la función de probabilidad de manera que refleje el hecho experimental de homogeneidad de ensayo a ensayo; es decir, que la probabilidad $\mathbf{p}$ $(0 < \mathbf{p} < 1)$ de obtener un éxito, sea la misma en cada ensayo y que también refleje el hecho experimental de que cada ensayo se realice sin interferencia de los anteriores. Si se denota por $\mathbf{q} = 1 - \mathbf{p}$ a la probabilidad de fracaso en cualquier ensayo, entonces, por ejemplo, al evento elemental que consiste de la palabra **e f e** se le asignaría la probabilidad $\mathbf{P}\{\mathbf{e\,f\,e}\} = \mathbf{p}^2\,\mathbf{q}$ ya que de acuerdo con la definición de eventos mutuamente independientes si se denota por:

- E_i al evento éxito en el iésimo ensayo,
- F_i al evento fracaso en el iésimo ensayo,

entonces:

$\mathbf{P}(E_1 \cap F_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\,\mathbf{P}(F_2)\,\mathbf{P}(E_3).$

Por último, para que se refleje el hecho experimental de homogeneidad se deberá tener que:

$\mathbf{p} = \mathbf{P}(E_1) = \mathbf{P}(E_2) = \ldots = \mathbf{P}(E_n)$

$\mathbf{q} = \mathbf{P}(F_1) = \mathbf{P}(F_2) = \ldots = \mathbf{P}(F_n)$

Por lo tanto, **se define:**

$\mathbf{P}\{E_1 \cap F_2 \cap E_3\} = \mathbf{p\,q\,p} = \mathbf{p^2\,q}.$

En general, para una palabra $x_1 x_2 \ldots x_n$ **de longitud** n **formada con las letras** e **y** f, **se define:**
$P(x_1 x_2 \ldots x_n) = p\alpha\ q\beta$ **donde**
$\alpha = \#$ **de** e's **en la palabra** $x_1 x_2 \ldots x_n$
$\beta = \#$ **de** f's **en la palabra** $x_1 x_2 \ldots x_n$

Con estos elementos podemos dar la definición **de espacio de probabilidad para** n **ensayos de Bernoulli.**

Este espacio de probabilidad es la terna $(\Omega, \mathcal{a}, P)$ **donde** Ω **y** P **se definieron líneas arriba y** $\mathcal{a}$ **es la familia de todos los subconjuntos de** Ω.

Ejemplo Una máquina produce artículos de los cuales normalmente un 5% de ellos son defectuosos.

Un operario encargado del control de calidad ve desfilar frente a él los artículos y va retirando los defectuosos. Si empieza a contar a partir de este momento, cuál es la probabilidad de que :

a. Los cinco primeros sean buenos

b. El primer artículo defectuoso aparezca en el sexto lugar.

c. El segundo artículo defectuoso aparezca en el tercer lugar.

Si llamamos éxito al hecho de que aparezca un artículo bueno y fracaso al caso contrario, entonces con la notación de los ensayos de Bernoulli podemos responder a estas preguntas como sigue:

$\mathbf{p} = 0.95$ $\mathbf{q} = 1 - \mathbf{p} = 0.05$.

Para la primera pregunta:

a. $\mathbf{P}(\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 \cap \mathbf{E}_3 \cap \mathbf{E}_4 \cap \mathbf{E}_5) = (0.95)^5 = 0.77$.

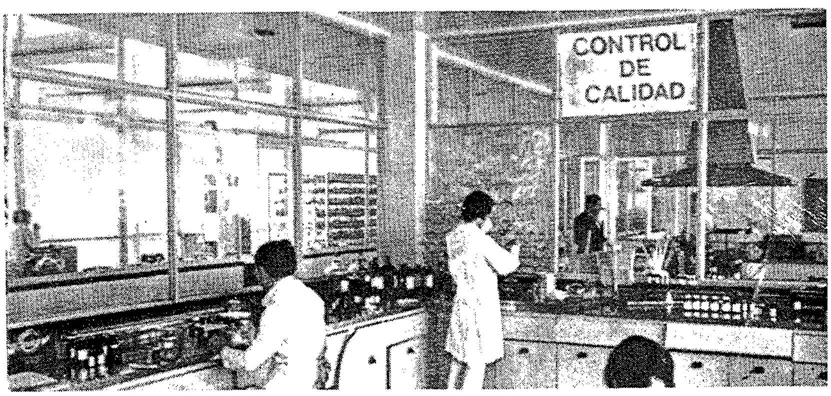
Para la segunda pregunta:

b. $\mathbf{P}(\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 \cap \mathbf{E}_3 \cap \mathbf{E}_4 \cap \mathbf{E}_5 \cap \mathbf{F}_6) = (0.95)^5 (0.05) = 0.39$.

Para la tercera pregunta:

c. $\mathbf{P}(\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{F}_2 \cap \mathbf{F}_3) + \mathbf{P}(\mathbf{F}_1 \cap \mathbf{E}_2 \cap \mathbf{F}_3)$

$= (0.95)(0.05)^2 + (0.05)(0.95)(0.05) = 0.005$.



EJERCICIOS DE APLICACION

Estos ejercicios han sido preparados para que usted aplique lo que aprendió. Realícelos, le ayudarán a reafirmar sus conocimientos. Si tiene alguna duda, consulte a su asesor.

N.B.

CUBRA CON LA SOLAPA DEL FORRO ESTA AREA DE RESPUESTAS Y LEVANTELA CADA VEZ QUE QUIERA COMPROBAR LA RESPUESTA CORRECTA.

1. Si en un juego de tiro al blanco la probabilidad de dar en el blanco en cada uno de los disparos es 0.2 y los disparos se efectúan de manera independiente, cuál es la probabilidad de dar en el blanco:

1.a. Por lo menos una vez en tres disparos.

Sea $\mathbf{A}_i$ el evento "se da en el blanco **i** veces en tres disparos".

1.a.

$\mathbf{P}(\mathbf{A}_0^c) = 1 - \mathbf{P}(\mathbf{A}_0)$

$= 1 - (0.8)^3 = 0.49.$

$\mathbf{A}_0^c$ es el evento "se da en el blanco por lo menos una vez en tres disparos".

1.b. Por lo menos dos veces en tres disparos.

1.b.

$\mathbf{A}_2 \cup \mathbf{A}_3$ es el evento de la segunda pregunta. El evento $\mathbf{A}_2$ ocurre cuando **ocurre** uno de los tres eventos elementales siguientes:

$\{\mathbf{eef}\}, \{\mathbf{efe}\}, \{\mathbf{fee}\}$

de manera que:

$\mathbf{P}(\mathbf{A}_2) = 3\,(0.2)^2\,(0.8) = 0.096$

$\mathbf{P}(\mathbf{A}_3) = \mathbf{P}\{\mathbf{eee}\} = 0.008$

$\therefore \mathbf{P}(\mathbf{A}_2 \cup \mathbf{A}_3) = 0.096$

$+ 0.008 = 0.104$

1.c. Que en tres disparos se dé en el blanco por lo menos una vez dos veces dado que se dio en el blanco por lo menos una vez.

1.c.

$$A_0^c = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

$$P(A_2 \cup A_3 \mid A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

$$= \frac{P(A_2 \cup A_3)}{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)}$$

ya que:

$$(A_2 \cup A_3) \subset (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

$$= \frac{0.104}{0.49} = 0.212$$

2. Una fábrica produce bulbos eléctricos con un 5% de bulbos defectuosos, cuál es la probabilidad de que en un lote de diez bulbos:

2.a. Todos estén buenos.

2.a.

$(0.95)^{10} = 0.599$

2.b. De que haya por lo menos un bulbo defectuoso.

2.b.

$1 - 0.599 = 0.401$

3. Suponiendo que en cada nacimiento hay una probabilidad 0.51 de dar a luz a un varón, cuál es la probabilidad de que en una familia con tres niños:

3.a. Todos sean varones.

3.a.

$(0.51)^3 = 0.133$

3.b. El primogénito sea varón.

3.b. 0.51

Sea **A** el evento "todos son varones", **B** el evento "el primogénito es varón" y **C** el evento "por lo menos uno de los tres es varón"

3.c.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{(0.51)^3}{0.51} = (0.51)^2$$

$= 0.26$ ya que

$A \subset B$

3.c. Todos sean varones dado que el primogénito es varón.

3.d.

$$P(A \mid C) = \frac{P(A)}{P(C)}$$

$$= \frac{(0.51)^3}{1-(0.49)^3} = \frac{0.133}{0.88}$$

$= 0.15$ ya que

$A \subset C$ y

$P(C) = 1 - P(C^c)$

3.d. Todos sean varones dado que por lo menos uno de los tres niños es varón.

4. Marque dos monedas de un peso con el número 1 y 2 respectivamente, tómelas varias veces.

   Sea:

   A el evento "la moneda 1 cae mostrando águila".

   B el evento "la moneda 2 cae mostrando sol". Compruebe que se cumple la igualdad

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

N.B. Después de haber realizado los ejercicios, usted podrá afirmar su aprendizaje. Lo que no haya sido muy claro o no haya podido captar perfectamente, coméntelo con su asesor.

SUGEREN CIAS DE ESTUDIO

Para ampliar su información se sugiere que:

- Consulte los siguientes libros:

FELLER, WILLIAM. **An Introduction to Probability Theory and its Applications**, Vol.I, New York, Edit. John Wiley & Sons, 1968, cap. V.

HERNANDEZ LERMA, ONESIMO, **Elementos de probabilidad y estadística,** México, Edit. Fondo de Cultura Económica, 1979, cap. 2 sec. 2-4.

RUIZ MONCAYO, ALBERTO, **Introducción y métodos de probabilidad,** México, Edit. Trillas, 1973, cap. 2.

Secuencia 3

Variables aleatorias

Ideas preliminares

Al hablar del **ingreso** de cada persona de una población bajo estudio, estamos asignando a cada persona un número que representa su ingreso. Es decir, estamos hablando de una regla de correspondencia que asocia a cada elemento de la población con un número.

En el contexto de un experimento aleatorio y del modelo probabilístico $(\Omega, \mathcal{a}, \mathbf{P})$ que lo describe, es conveniente introducir reglas de correspondencia que asocien números a cada elemento ω de la población Ω, ya que de esta manera se enriquece el modelo original del experimento aleatorio y podemos así formular diversas aseveraciones sobre el mismo.

Definición

Una variable aleatoria X **sobre el espacio de probabilidad** $(\Omega, \mathcal{a}, P)$ **es una función definida sobre** Ω **y con valores reales; es decir,** X **es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento** ω **de** Ω **uno y sólo un número, denotado por** X,(ω).

Ejemplo En el contexto de cinco ensayos de Bernoulli, en donde la probabilidad de éxito en cada ensayo es $\mathbf{p}\,(0 < \mathbf{p} < 1)$, sea $\mathbf{X} =$ número de éxitos en los cinco ensayos.

Puede tratarse de un juego de tiro al blanco en donde la probabilidad de dar en el blanco (éxito) es **p**; en este caso, **X** es el número de veces que se da en el blanco en cinco disparos. También se puede tratar de nacimientos en donde la probabilidad de obtener un varón en cada nacimiento sea igual a **p** y **X** es el número de varones que se obtienen en cinco nacimientos (se supone que cada nacimiento da lugar a un solo niño, ya sea varón o niña).

N.B. Una vez que se define una variable aleatoria se pueden formular eventos y calcular sus respectivas probabilidades de ocurrencia.

El símbolo $[\mathbf{X} = \mathbf{x}]$ denotará al evento, **la variable aleatoria X toma el valor x,** en notación de conjuntos este evento corresponde al conjunto $\{\ \omega \in \Omega: \mathbf{X}\ (\omega) = \mathbf{x}\}$. Tratándose de la variable del ejemplo:

$$\mathbf{P}\ [\mathbf{X} = 0] = (1 - \mathbf{p})^5,$$

ya que el evento $[X = 0]$ es el evento **no ocurre ningún éxito en los cinco ensayos** o lo que es equivalente **ocurren cinco fracasos en los cinco ensayos.**

$$P[X = 1] = 5p(1 - p)^4$$

ya que el evento $[X = 1]$ ocurre si y sólo si se presenta cualquiera de los siguientes cinco resultados elementales:

effff

fefff

ffeff

fffef

ffffe

Para calcular la probabilidad de la ocurrencia del evento $[X = 3]$ conviene recurrir al coeficiente binomial (véase la secuencia 2 de la primera unidad de este Módulo)

$$P[X = 3] = \binom{5}{3} p^3 (1 - p)^2.$$

El evento $[X = 3]$ ocurre si y sólo si acontece cualquiera de los siguientes diez resultados elementales:

eeeff	**efefe**
eefef	**eeffe**
efeef	**fefee**
feeef	**ffeee**
feefe	**effee**

El evento elemental que consta de cualesquiera de dichos resultados tiene probabilidad $p^3(1-p)^2$ de ocurrir y hay en total $\binom{5}{3}$ eventos elementales posibles, tantos como hay maneras de seleccionar 3 lugares de 5, en los cuales pondremos letras **e** y en los $5 - 3 = 2$ restantes pondremos letras **f**.

Distribución de probabilidades de una variable aleatoria

A la lista de los valores de una variable aleatoria, junto con las correspondientes probabilidades de que la variable aleatoria tome esos valores, se llama distribución de probabilidades **o simplemente** distribución **de la variable aleatoria.**

Ahora bien, podemos escribir la distribución de la variable **X** del ejemplo de la siguiente manera:

x	P [X = x]
0	$(1-p)^5$
1	$5p(1-p)^4$
2	$\binom{5}{2} p^2 (1-p)^3$
3	$\binom{5}{3} p^3 (1-p)^2$
4	$\binom{5}{4} p^4 (1-p)$
5	p^5

De manera compacta podemos escribir:

$$P[X = x] = \binom{5}{x} p^X (1-p)^{5-X} \text{ para } x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$= 0 \text{ para } x \neq 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Ejemplo de densidad de la distribución de una variable aleatoria

La función real de variable real:

$$f(x) = \binom{5}{x} p^X (1-p)^{5-X} \text{ para } x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$= 0 \text{ para } x \neq 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

y se llama **densidad** de la distribución de la variable aleatoria **X.** Con esta densidad podemos calcular la probabilidad del siguiente evento:

$$[1 \leq \mathbf{X} < 4]$$

que denota al evento **X toma un valor mayor o igual que 1 y menor que 4":**

$$\mathbf{P}\,[1 \leq \mathbf{X} < 4] = \mathbf{f}\,(1) + \mathbf{f}\,(2) + \mathbf{f}\,(3)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}=1.}^{3} \mathbf{f}\,(\mathbf{k}) = \sum \binom{5}{\mathbf{k}} \mathbf{p}^{\mathbf{K}}\,(1 - \mathbf{p})^{5-\mathbf{k}}$$

Aquí termina la referencia al ejemplo.

Distribución binomial de parámetros n, p

Diremos que la variable aleatoria **X** tiene una distribución binominal de parámetros **n, p** si:

$$\mathbf{P}\,[\mathbf{X} = \mathbf{k}\,] = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} \mathbf{p}^{\mathbf{k}} \mathbf{q}^{\mathbf{n}-\mathbf{k}} \text{ para } \mathbf{k} = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \mathbf{n}$$

$$= 0 \text{ para } \mathbf{k} \neq 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \mathbf{n}$$

donde $0 < \mathbf{p} < 1$ y $\mathbf{q} = 1 - \mathbf{p}$.

Esta distribución aparece en el contexto de **n** ensayos de Bernoulli, en donde la probabilidad de éxito es **p** y **X** = número de éxitos en los **n** ensayos.

Puede tratarse de **n** extracciones sucesivas al azar y con reemplazo de una urna (cada vez se regresa a la urna la bola que se saca) que contiene bolas blancas y negras, en donde la proporción de las bolas negras es **p** y **X** es el número de bolas negras que se sacan.

Ejemplo

De una población que contiene cinco personas, tres hombres y dos mujeres, se sacarán sin reemplazo dos personas al azar.

X = número de mujeres que se sacan.

[**X** = **x**] denota al evento **se sacan x mujeres.**

$$\mathbf{P}\,[\mathbf{X} = 0] = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}$$

El denominador es el número de casos posibles en que se pueden sacar dos personas al azar sin reemplazo de una población de cinco personas.

En otras palabras, es el número de maneras en que se puede dividir una población de cinco personas en dos subpoblaciones: una de ellas que contenga a dos personas y la otra a tres.

El numerador es el número de casos favorables al evento $[\mathbf{X} = 0]$; o sea, es el número de maneras en que podemos sacar a cero mujeres y a dos hombres de esta población.

Podemos escribir la distribución de esta variable aleatoria mediante la siguiente fórmula:

$$\mathbf{P}\,[\mathbf{X} = \mathbf{x}] = \frac{\binom{2}{x}\binom{3}{2-x}}{\begin{matrix}5\\2\end{matrix}} \quad \text{para } \mathbf{x} = 0, 1, 2$$

$$= 0 \text{ para } \mathbf{x} \neq 0, 1, 2.$$

Ejemplo de densidad de la distribución de una variable aleatoria

La densidad de la variable aleatoria **X** del ejemplo es:

$$\mathbf{f}\,(\mathbf{x}) = \frac{\binom{2}{x}\binom{3}{2-x}}{\binom{5}{2}} \quad \text{para } \mathbf{x} = 0, 1, 2$$

$$= 0 \text{ para } \mathbf{x} \neq 0.\ 1.\ 2.$$

Aquí termina la referencia al ejemplo.

Definición

La densidad f de una variable aleatoria discreta X (o sea que X toma solamente un número finito o numerable de valores) es la función real de variable real definida por:

$$f\,(x) = P\,[X = x]$$

Por medio de la densidad de **f** de una variable aleatoria **X,** podemos calcular probabilidades de la ocurrencia de eventos generados por la variable.

Distribución hipergeométrica de parámetros n, M **y** N

Diremos que la variable aleatoria **X** tiene una distribución hipergeométrica de parámetros **n, M** y **N** (**n, M** y **N** son números enteros no negativos tales que $1 \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{N}$, $1 \leq \mathbf{M} < \mathbf{N}$) si:

$$P[X = k] = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{para } k = 0, 1, 2 \ldots \; n$$

$$= 0 \text{ para } k \neq 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Observación

Recuerde que hemos convenido:

$$\binom{M}{k} = 0 \text{ si } M < k$$

$$\binom{N-M}{n-k} = 0 \text{ si } N - M < n - k$$

Esta distribución aparece en el siguiente contexto:

De una urna que contiene **N** bolas de las cuales **M** son blancas y el resto (**N** — **M**) son negras, se sacarán al azar **n** bolas. Sea:

X = número de bolas blancas en la muestra de **n** bolas.

Ejemplo

Veamos el siguiente ejemplo:

El 60% de una población de 100 personas es adicta a fumar cigarrillos. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de tamaño 10 tomada al azar se encuentre igual número de personas que fuman y que no fuman?

Aquí:

- $N = 100$.
- $M = 0.6\,(100) = 60$.
- $N - M = 40$.
- $n = 10$.

Sea:

X = número de personas que fuman en la muestra.

$$P\,[X=5]=\frac{\binom{60}{5}\binom{40}{5}}{\binom{100}{10}}=0.208.$$

¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de tamaño 2 tomada al azar, se encuentre igual número de personas que fuman y que no fuman?

En este caso:

$N=100.$

$M=60.$

$N-M=40.$

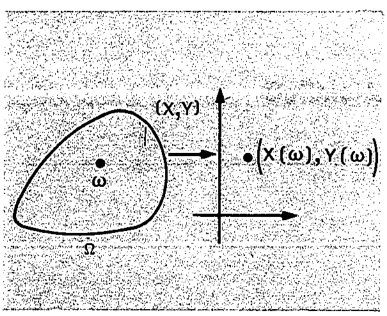
$n=2.$

Si **X** es el número de personas que fuman en la muestra:

$$P\,[x=1]=\frac{\binom{60}{1}\binom{40}{1}}{\binom{100}{2}}=\frac{(60)\quad(40)}{(100)\,(99)/2}=0.485.$$

Al hablar del peso y la altura de cada persona de una población bajo estudio, estamos asignando a cada persona una pareja de números que son respectivamente su peso y su altura.

Definición de vector aleatorio

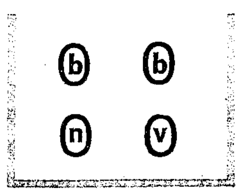


Un vector aleatorio (X, Y) sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, es una función definida sobre Ω y con valores en $\mathbb{R}^2$ (el espacio euclidiano de dimensión dos); es decir, (X, Y) es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento ω de Ω una y sólo una pareja ordenada de números, denotada por $(X(\omega), Y(\omega))$.

De manera alternativa se puede decir que un vector aleatorio es una pareja ordenada de variables aleatorias.

Ejemplo

De la urna



que contiene dos bolas blancas, una negra y una verde, se sacará una bola al azar. Sea $\mathbf{X}$ = número de bolas blancas extraídas y $\mathbf{Y}$ = número de bolas blancas o negras extraídas.

Ω queda descrito por el conjunto $\Omega = \{\mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{v}\}$ de los resultados elementales posibles y $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ asocia a cada resultado una pareja de números como se indica a continuación:

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y})(\mathbf{b}) = (1, 1)$$

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y})(\mathbf{n}) = (0, 1)$$

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y})(\mathbf{v}) = (0, 0)$$

La siguiente tabla representa las probabilidades con que el vector aleatorio $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ toma sus posibles valores:

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{2}{4}$

Es decir, $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ toma el valor $(0, 0)$ cuando se saca la bola verde **v** y esto ocurre con probabilidad $\frac{1}{4}$.

$(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ toma el valor $(0, 1)$ cuando se saca la bola negra **n** y esto ocurre con probabilidad $\frac{1}{4}$.

El evento $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tomar el valor $(1,0)$, es un evento imposible y por lo tanto ocurre con probabilidad 0.

Finalmente, $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ toma el valor $(1, 1)$ cuando se saca una bola blanca **b** y esto ocurre con probabilidad $2/4$.

Representación de la distribución conjunta de un vector aleatorio que toma un número finito de valores con probabilidad positiva

En general, se puede representar la distribución conjunta de un vector aleatorio **(X, Y)** por medio de una tabla de la forma siguiente:

X \ Y	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}		p_{1j}		p_{1m}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}		p_{2j}		p_{2m}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$							
x_i	p_{i1}	p_{i2}		p_{ij}		p_{im}	$p_{i\cdot}$
$\vdots$							
x_n	p_{n1}	p_{n2}		p_{nj}		p_{nm}	$p_{n\cdot}$
	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$		$p_{\cdot j}$		$p_{\cdot m}$	1

En donde p_{ij} es la probabilidad de que **X** tome el valor x_i y **Y** tome el valor y_j. En símbolos:

$$P[X = x_i, Y = y_j] = p_{ij},$$

en donde:

$[X = x_i]$ denota al evento **X** toma el valor x_i;

$[Y = y_j]$ denota al evento **Y** toma el valor y_j;

$[X = x_i, Y = y_j]$ denota al evento, **X** toma el valor x_i y **Y** toma el valor y_j.

Se observa que:

$$[X = x_i] = [X = x_i, Y = y_1] \cup [X = x_i, Y = y_2] \cup \ldots$$
$$\ldots \cup [X = x_i, Y = y_n].$$

Es decir,

el evento X toma el valor x_i, es igual al evento X toma el valor x_i y Y toma el valor y_1 ; o bien, X toma el valor x_i y Y toma el valor y_2; o bien " . . . " y que los eventos de lado derecho de la igualdad son mutuamente excluyentes, de lo anterior se sigue que:

$$P[X = x_i] = p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{im};$$

si se denota:

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij},$$

entonces se puede escribir:

$$P[X = x_i] = p_{i\cdot}$$

De esta manera se ve que de la distribución conjunta de X y Y se puede obtener la distribución de probabilidades para los valores de X y, de manera análoga, se puede obtener la distribución de probabilidades para los valores de Y. A estas últimas distribuciones se les suele llamar distribuciones marginales de X y Y respectivamente.

Si se denota:

$$p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij},$$

entonces:

$$P[Y = y_j] = p_{\cdot j}$$

Finalmente se verifica que:

$$p_{1\cdot} + p_{2\cdot} + \ldots + p_{n\cdot} = 1$$

$$p_{\cdot 1} + p_{\cdot 2} + \ldots + p_{\cdot m} = 1$$

ya que la primera igualdad nos dice que la probabilidad de que "la variable aleatoria **X** tome un valor" es igual a uno y de manera similar para **Y.**

De igual manera se podría hablar de la distribución conjunta de tres o más variables. En estos casos, tendríamos que usar tablas de tres o más dimensiones para representarla, según el caso. Por ejemplo:

$$P\,[X = x_i\,,\, Y = y_i\,,\, Z = z_k] = p_{ijk},\ \text{etc.}$$

EJERCICIOS DE APLICACION

Estos ejercicios han sido preparados para que usted aplique lo que aprendió. Realícelos, le ayudarán a reafirmar sus conocimientos. Si tiene alguna duda, consulte a su asesor.

N.B.

CUBRA CON LA SOLAPA DEL FORRO ESTA AREA DE RESPUESTAS Y LEVANTELA CADA VEZ QUE QUIERA COMPROBAR LA RESPUESTA CORRECTA.

1. ¿Cuál es la probabilidad en 10 personas de que por lo menos una cumpla años el día 1º de enero? Suponga que cada persona tiene igual probabilidad de haber nacido en cualquier día del año.

1. $\mathbf{p} = \frac{1}{365}$

$\mathbf{X}$ = número de personas (de las 10) que cumple años en el día 1º de enero.

Llame "éxito" al hecho de cumplir años el día 1º de enero.

$$\mathbf{P}[\mathbf{X} \geq 1] = 1 - \mathbf{P}[\mathbf{X} = 0]$$

$$= 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{10} = 0.027$$

2. El 45% de una población vio un programa de televisión. Se realiza una encuesta (al azar y con reemplazo) de tamaño 10. Cuál es la probabilidad de que:

2. éxito = haber visto el programa:

$\mathbf{p} = 0.45$,

$\mathbf{X}$ = número de personas de la muestra que vieron el programa.

2.a. Ninguna de las personas entrevistadas haya visto el programa.

2.a. $\mathbf{P}[\mathbf{X} = 0] =$

$(0.55)^{10} = 0.0025$

2.b. Solamente una persona lo vio.

2.b. $\mathbf{P}[\mathbf{X} = 1] =$

$10\,(0.45)\,(0.55)^9 = 0.0207$

2.c. Por lo menos dos personas lo vieron.

2.c. $P[X \geq 2] =$

$1 - P[X = 0] -$

$P[X = 1] \quad = 0.9768$

2.d. La mitad de las personas lo vieron.

2.d. $P[X = 5] =$

$\binom{10}{5} (0.45)^5$

$(0.55)^5 \quad = 0.234$

3. El 45% de una población de 100 habitantes vio un programa de televisión. Se realiza una encuesta (al azar y sin reemplazo) de tamaño 10. Cuál es la probabilidad de que:

3. $X =$ número de personas de la muestra que vieron el programa

$N = 100$
$M = 45$
$n = 10$

3.a. Ninguna de las personas entrevistadas haya visto el programa.

3.a. $P[X = 0] =$

$$\frac{\binom{55}{10}}{\binom{100}{10}} = 0.00017$$

3.b. Solamente una persona lo vio.

3.b. $P[X = 1] =$

$$\frac{\binom{45}{1}\binom{55}{9}}{\binom{100}{10}} = 0.0165$$

3.c. Por lo menos dos personas lo vieron.

3.c. $P[X \geq 2] =$

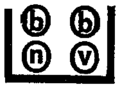
$1 - P[X = 0] - P[X = 1] =$

0.9833

3.d. La mitad de las personas lo vieron.

3.d. $P[X = 5] =$

$$\frac{\binom{45}{5}\binom{55}{5}}{\binom{100}{10}}$$

4. De la urna  que contiene dos bolas blancas, una negra y una verde, se sacarán al azar sucesivamente y con reemplazo cuatro bolas. Sean **X** y **Y** el número de bolas blancas y el número de bolas blancas o negras respectivamente.

4.a. Encuentre la distribución conjunta de **X** y **Y.**

4.a. El evento $[\mathbf{X}=0, \mathbf{Y}=0]$ ocurre si y sólo si ocurre el resultado $\{\mathbf{vvvv}\}$

$\therefore \mathbf{P}[\mathbf{X}=0, \mathbf{Y}=0] = (1/4)^4$.

El evento $[\mathbf{X}=0, \mathbf{Y}=1]$ ocurre si y sólo si ocurre cualquiera de los resultados:

vvvn

vvnv

vnvv

nvvv

$\therefore \mathbf{P}[\mathbf{X}=0, \mathbf{Y}=1]$

$= 4\,(1/4)\,(1/4)^3$

$= 4\,(1/4)^4 = (1/4)^3$.

El evento $[\mathbf{X}=2, \mathbf{Y}=4]$ es igual al evento "ocurren dos bolas blancas y dos negras";

$\mathbf{P}[\mathbf{X}=2, \mathbf{Y}=4]$

$= \binom{4}{2}\,(2/4)^2\,(1/4)^2$

ya que el evento:

$[\mathbf{X}=2, \mathbf{Y}=4]$ ocurre si y sólo si ocurre cualquiera de los resultados siguientes:

bbnn **nbbn**

bnbn **nbnb**

bnnb **nnbb**

Las demás probabilidades de la distribución conjunta se calculan de manera similar.

4.b. $\mathbf{P}\,[\mathbf{Y}=4 \mid \mathbf{X}=2]$

$$=\frac{\mathbf{P}\,[\mathbf{X}=2,\mathbf{Y}=4]}{\mathbf{P}\,[\mathbf{X}=2]}$$

$$=\frac{\binom{4}{2}\left(\frac{2}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\binom{4}{2}\left(\frac{2}{4}\right)^2\left(\frac{2}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}$$

4.b. ¿Cuál es la probabilidad de que $\mathbf{Y}=4$, dado que se obtuvieron dos bolas blancas?

4.c. $\mathbf{P}\,[\mathbf{X}=\mathbf{k}]=$

$$\binom{4}{\mathbf{k}}\left(\frac{2}{4}\right)^{\mathbf{k}}\left(\frac{2}{4}\right)^{4-\mathbf{k}}$$

para $\mathbf{k}=$ 0, 1, 2, 3, 4.

4.c. Encuentre la distribución de **X.**

4.d. $\mathbf{P}\,[\mathbf{Y}=\mathbf{k}]=$

$$\binom{4}{\mathbf{k}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\mathbf{k}}\left(\frac{1}{4}\right)^{4-\mathbf{k}}$$

para $\mathbf{k}=0, 1, 2, 3, 4$.

4.d. Encuentre la distribución de **Y.**

4.e. De la distribución conjunta de **X** y **Y,** encuentre la distribución de **Y** y compruebe que obtendrá la misma distribución que en el ejercicio anterior (d).

5. Lance 10 veces una moneda:

- Anote el número (**k**) de águilas obtenidas.
- Enseguida, calcule la frecuencia **k**/10 de águilas obtenidas.
- Ahora, calcule la probabilidad de que una variable aleatoria **X** con distribución binomial de parámetros $\mathbf{n}=10$ y $\mathbf{p}=\dfrac{\mathbf{k}}{10}$ tome el valor **k**; es decir, calcule la probabilidad:

$$\mathbf{P}\,[\mathbf{X}=\mathbf{k}]=\binom{10}{\mathbf{k}}\,\mathbf{p}^{\mathbf{k}}\quad(1-\mathbf{p})^{10-\mathbf{k}}.$$

- Por último, usando diversos valores para **p,** verifique si puede mejorar esta probabilidad; es decir, vea si puede encontrar un valor de **p** que le dé una mayor probabilidad de haber obtenido el número de águilas que ocurrieron en el experimento.

Después de haber realizado los ejercicios, usted podrá afirmar su aprendizaje. Lo que no haya sido muy claro o no haya podido captar perfectamente, coméntelo con su asesor.

N.B.

SUGERENCIAS DE ESTUDIO

Para ampliar su información se sugiere que:

- Consulte los siguientes libros:

FELLER, WILLIAM, **An Introduction to Probability Theory and its Applications,** Vol. 1, New York, Edit. John Wiley & Sons, 1968, cap. IX.

HERNANDEZ LERMA, ONESIMO, **Elementos de probabilidad y estadística,** México, Edit. Fondo de Cultura Económica, 1979, cap. 3.

RUIZ MONCAYO, ALBERTO, **Introducción y métodos de probabilidad,** México, Edit. Trillas, 1973, cap. 4.

Secuencia 4

Valor esperado

Ideas preliminares

Si decimos que un dado tiene probabilidad p_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) de caer mostrando la cara **i** cuando se lanza al aire, estamos indicando, de acuerdo a la interpretación frecuencial de la probabilidad, que en un número grande (**n**) de lanzamientos, la frecuencia $\frac{n_i}{n}$ con que aparece la cara **i** es aproximadamente igual a la probabilidad p_i.

En los **n** lanzamientos habremos obtenido una puntuación total igual a:

$$n_1 + 2\,n_2 + 3\,n_3 + 4\,n_4 + 5\,n_5 + 6\,n_6,$$

donde n_i es el número de veces que aparece la cara **i**. La puntuación promedio será igual a:

$$\frac{n_1}{n} + 2\frac{n_2}{n} + 3\frac{n_3}{n} + 4\frac{n_4}{n} + 5\frac{n_5}{n} + 6\frac{n_6}{n}$$

y de acuerdo con la interpretación frecuencial, este número deberá ser aproximadamente igual a:

$$p_1 + 2\,p_2 + 3\,p_3 + 4\,p_4 + 5\,p_5 + 6\,p_6.$$

Valor esperado de una variable aleatoria discreta

Sea **X** una variable aleatoria que toma solamente un número finito de valores $x_1, x_2, \ldots, x_m$ con probabilidad positiva y sean $p_1, p_2, \ldots, p_m$ las respectivas probabilidades.

Definición

El valor esperado de X **denotado por** E (X), **es el número que resulta al promediar los valores de la variable aleatoria** X **por medio de su distribución.**
En símbolos:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i\,p_i$$

Ejemplo

Si la variable aleatoria **X** tiene una distribución binomial de parámetros **n, p**, entonces su valor esperado es igual a **np.** En símbolos:

$$E(X) = np.$$

Podemos demostrar esta aseveración aplicando la definición de valor esperado a **X**; es decir,

Deducción del valor esperado de una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n, p

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^{k} q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \frac{(n)_{k}}{k!} p\, p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)_{k-1}}{(k-1)!} p p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} \\
&= n p \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)_{k-1}}{(k-1)!} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)}
\end{aligned}
$$

Cambiando el índice de la suma de la siguiente manera:

$$j = k - 1,$$

se obtiene:

$$= np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)_{j}}{j!} p^{j} q^{n-1-j} = np\,(p+q)^{n-1} = np.$$

Este resultado es muy natural, ya que si **p** es la probabilidad de obtener un éxito en un ensayo de Bernoulli, entonces esperamos obtener **np** éxitos en **n** ensayos. Más adelante en esta misma secuencia veremos una manera más sencilla de obtener este mismo resultado.

Observación

E (X) suele llamarse el valor esperado de X y también la esperanza de X.

Al símbolo E se le 'lama el operador esperanza.

Propiedades básicas del operador esperanza

A continuación veremos las propiedades básicas del operador esperanza; **X, Y** son dos variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}\ \mathbf{P})$ y cada una de ellas solamente toma un número finito de valores con probabilidad positiva.

Sea φ una función real definida en $\mathbb{R}^2$ (el plano euclideano) y con valores reales:

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Con φ, **X** y **Y** podemos formar una nueva variable aleatoria denotada $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ y definida como sigue:

$\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})(\omega) = \varphi(\mathbf{X}(\omega), \mathbf{Y}(\omega))$.

Ejemplos

Veamos los siguientes ejemplos:

a. Si $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y}$;

entonces,

$\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$ y **se llama la suma** de **X** y **Y**, por lo tanto, definida de la siguiente manera:

$(\mathbf{X} + \mathbf{Y})(\omega) = \mathbf{X}(\omega) + \mathbf{Y}(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$.

b. Si **a, b** y **c** son números reales y

$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{y} + \mathbf{c}$

entonces,

$\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{aX} + \mathbf{bY} + \mathbf{c}$

llamada "**combinación lineal de** X **y** Y"; por lo tanto está definida por:

$(\mathbf{aX} + \mathbf{bY} + \mathbf{c})(\omega) = \mathbf{aX}(\omega) + \mathbf{bY}(\omega) + \mathbf{c}$.

c. Si $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{xy}$;

entonces,

$\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{XY}$

y se denomina producto de **X** y **Y**.

d. Si $\varphi(x, y) = x/y$ para $y \neq 0$

$\varphi(x, y) = 0$ para $y = 0$

entonces,

$\varphi(X, Y) = X/Y$

y se llama el cociente de **X** y **Y**.

Definición de valor esperado para funciones de valores aleatorios

Dada la distribución conjunta p_{ij} **de** X **y** Y **y la función**

$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

la esperanza o el valor esperado de φ(X, Y)**se define como sigue:**

$$E[\varphi(X, Y)] = \sum_{i,j} p_{ij}\, \varphi(x_i\, y_j)$$

Es decir, se promedian los valores de φ **(X, Y)** por medio de la distribución conjunta de **X** y **Y**.

Observe

El símbolo $\sum_{i,j}$ **denota a la:**

- **Doble suma** $\sum_i \sum_j$
- **O a la doble suma** $\sum_j \sum_i$

Sin importar el orden en que se sumen

Demostración de las propiedades básicas del operador esperanza

Ahora demostraremos las siguientes propiedades básicas del operador esperanza.

1. **Propiedad aditiva.**

   Se tiene que el valor esperado de la suma de las variables **X** y **Y** es igual a la suma de sus respectivos valores esperados.

   En símbolos se tiene que:

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

Demostración

Demostración:

$$E(X+Y)=\sum_{i,j} p_{ij}(x_i+y_j)=\sum_{i,j}(p_{ij}x_i+p_{ij}y_j),$$

si sumamos primero con respecto a **j**,

$$=\sum_i \sum_j p_{ij}x_i+\sum_i \sum_j p_{ij}y_j$$

$$=\sum_i\left(\sum_j p_{ij}\right)x_i+\sum_j\left(\sum_i p_{ij}\right)y_j$$

y, por lo visto en la secuencia 3 de esta unidad, se obtiene que:

$$=\sum_i p_{i\cdot}x_i+\sum_j p_{\cdot j}y_j,$$

donde p_{i} y $p_{\cdot j}$ son las probabilidades de que **X** tome el valor x_i y que **Y** tome el valor y_j respectivamente.

Por lo que:

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y),$$

que es lo que se quería demostrar.

2. **Propiedad lineal.**

Esta propiedad generaliza a la propiedad aditiva y dice que el valor esperado o la esperanza de una combinación lineal de las variables **X** y **Y** es igual a la misma combinación lineal de sus respectivos valores esperados.

En símbolos:

$$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c.$$

Antes de demostrar esta propiedad conviene observar que el valor esperado de una constante **c**, es la misma constante; ya que vista ésta como variable aleatoria, solamente toma el valor **c** con probabilidad igual a la unidad.

Demostración:

Demostración

$$E(aX + bY + c) = \sum_{i,j} p_{ij}(ax_i + by_j + c) =$$

$$\sum_{ij} p_{ij}(ax) + \sum_{ij} p_{ij}(by_j) + \sum_{ij} p_{ij}(c)$$

$$= a\sum_{i}\left(\sum_{j} p_{ij}\right)x_i + b\sum_{j}\left(\sum_{i} p_{ij}\right)y_j + c\sum_{i,j} p_{ij}$$

y, por lo visto en la secuencia 3 de esta unidad,

$$= a\sum_{i} p_{i.}x_i + b\sum_{j} p_{.j}\, y_j + c$$

$$= a\,E(X) + bE(Y) + c.$$

Mediante la propiedad aditiva del operador esperanza, podemos dar ahora una segunda deducción del valor esperado de una variable aleatoria **X** con distribución binomial de parámetros **n** y **p**. Para ello, recordemos que la variable **X** aparece en el contexto de **n** ensayos de Bernoulli; en donde la probabilidad de obtener éxito en cada ensayo es **p** y donde **X** = número total de éxitos en los **n** ensayos.

Valor esperado de una variable aleatoria con distribución binomi de parámetros n y p

Si definimos a las variables aleatorias

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ por medio de:

$X_j = 1$ si se obtiene éxito en el

j-ésimo ensayo.

$X_j = 0$ si se obtiene fracaso en el

j-ésimo ensayo.

Entonces, para cada **j** la distribución de X_j es:

x	$P[X_j = x]$
0	$1 - p$
1	p

y su valor esperado es:

$\mathbf{E}(\mathbf{X}_j) = 0(1 - \mathbf{p}) + 1(\mathbf{p}) = \mathbf{p}.$

Por otra parte se tiene que:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \ldots + \mathbf{X}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i$$

y, por la propiedad aditiva de **E**, se obtiene:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \sum_{i} \mathbf{E}(\mathbf{X}_i) = \mathbf{np}$$

Ejemplo de un juego de azar

Pedro y Juan lanzarán **n** veces una moneda que tiene probabilidad **p** de caer águila.

Por cada águila, Pedro ganará 5 pesos y por cada sol perderá 4 pesos.

¿Cuál es la ganancia esperada de Pedro?

Solución

Solución:

En cada lanzamiento Pedro ganará 5 pesos con probabilidad **p** y perderá 4 pesos con probabilidad $\mathbf{q} = 1 - \mathbf{p}$.

Sea $\mathbf{X}_j$ = ganancia de Pedro en el **j**-ésimo lanzamiento. La distribución de $\mathbf{X}_j$ es:

x	$P[x_j = x]$
-4	q
5	p

y su valor esperado es:

$$E(X_j) = -4q + 5p = 9p - 4.$$

Si denotamos por **X** a la suma de las X_j:

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j;$$

entonces **X** es la ganancia de Pedro y su valor esperado es:

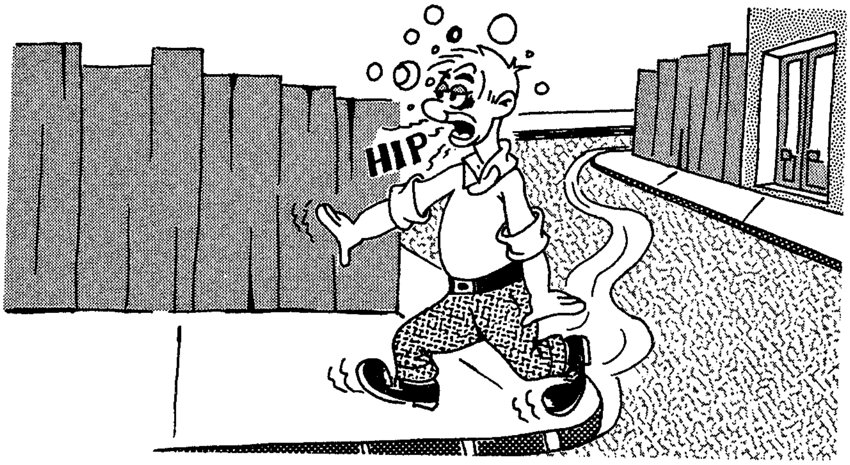
$$E(X) = n(9p\text{-}4).$$

Para que este sea un juego justo, ¿cuál deberá ser la probabilidad **p**?. Si entendemos por un juego justo aquel para el cual los dos jugadores tienen la misma oportunidad de ganar; entonces, se deberá satisfacer que $E(X) = 0$ y por lo tanto que $p = 4/9$.

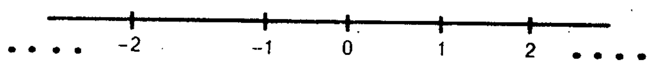
Ejemplo de una caminata aleatoria

Pedro realizará una caminata aleatoria por etapas y en cada etapa con probabilidad 3/4 caminará una cuadra en dirección oriente y con probabilidad 1/4 caminará una cuadra en dirección poniente. Se podría pensar que en cada etapa, Pedro lanza al aire una moneda que tiene probabilidad 3/4 de caer águila; si cae águila, entonces él camina una cuadra hacia el oriente y si cae sol entonces camina una cuadra hacia el poniente.

¿Cuál es la posición esperada de Pedro al cabo de 6 etapas?



Suponiendo que parte del origen;



Sea

$X_j = 1$ si camina una cuadra hacia el oriente en la j-ésima etapa.

$X_j = -1$ si camina una cuadra hacia el poniente en la j-ésima etapa.

Entonces

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$

es la posición de Pedro al cabo de la sexta etapa y la respuesta es:

$$E(X) = E(X_1) + \ldots + (X_6) = 6E(X_1)$$

$$= 6\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{6}{2} = 3.$$

¿Cuál es la distribución de la variable aleatoria X?

X puede tomar los valores $-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$ con probabilidad positiva

$$P[X = 2] = \binom{6}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

ya que para llegar a la posición (2), tiene que caminar 4 cuadras al oriente y 2 al poniente. $\binom{6}{2}$ es el número de maneras en que se pueden escoger 2 etapas de las 6, en las cuales él caminará hacia el poniente.

En general, para calcular la distribución de **X** es conveniente introducir a la variable **Y** = número de etapas en que se camina hacia el oriente.

$6 - \mathbf{Y}$ = número de etapas en que se camina hacia el poniente.

De manera que:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} - (6 - \mathbf{Y}) = 2\mathbf{Y} - 6;$$

es decir, la posición **X** es igual al número de cuadras en que se caminó al oriente menos el número de cuadras en que se caminó hacia el poniente.

Si llamamos éxito cada vez que se camina hacia el oriente, entonces resulta claro que la distribución **Y** es una **distribución binomial** de parámetros.

Observe

$$\mathbf{n} = 6 \quad \text{y} \quad \mathbf{p} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \mathbf{E}(\mathbf{X}) = 2\mathbf{E}(\mathbf{Y}) - 6 = 2(6)\left(\frac{3}{4}\right) - 6 = 3.$$

Lo cual concuerda con el primer cálculo de este valor esperado y sirve como ejemplo de un camino alternativo para lograr un mismo objetivo.

En el resto de esta secuencia veremos cómo el concepto de esperanza matemática nos permite obtener la ecuación de estado de los gases perfectos, a partir de hipótesis sobre la constitución de la materia. Se aconseja al lector relea las primeras páginas de la secuencia 2 de la primera unidad de este Módulo, donde se plantea el problema.

En la secuencia 2 de la unidad 1 de este Módulo se planteó el problema de obtener ecuación de estado para gases de acuerdo con suposiciones acerca de la estructura de la materia (mecánica estadística). El análisis de estas cuestiones prosiguió en las secuencias 3 y 4 de dicha unidad sin que se llegara a concretar ningún resultado al respecto.

La esperanza matemática en la obtención de la ecuación de los gases perfectos

Ahora ha llegado el momento de integrar dichos desarrollos y utilizar el concepto de esperanza matemática para obtener la ecuación de los gases perfectos. **Es necesario señalar que esta ecuación de estado no es la mejor, pero deducir ecuaciones más realistas requiere introducir hipótesis más complicadas** (pero más adecuadas a la realidad) **que mucho complicarían la discusión al requerir herramientas de mayor nivel.**

Los conceptos que daremos a continuación constituyen una aplicación simple de las ideas de **espacio probabilístico** y **esperanza matemática** y forman la base de la **teoría cinética de los gases,** que mucho deben al físico inglés James Clerk Maxwell.

Igual que en otras partes de la mecánica estadística, aquí se promedian adecuadamente las magnitudes físicas de interés (la energía, para ser específicos) para obtener así sus valores macroscópicos.

Es necesario que recuerde los siguientes conceptos

Recuerde que una mol de cualquier sustancia tiene tanta masa como su peso molecular. Así pues, un gramo-mol de O_2 contiene 32 gr., una libra-mol de H_2O contiene 18 libras, etc.

Otro hecho interesante al respecto es que en un gramo-mol de cualquier sustancia, hay siempre el mismo número de moléculas, a saber:

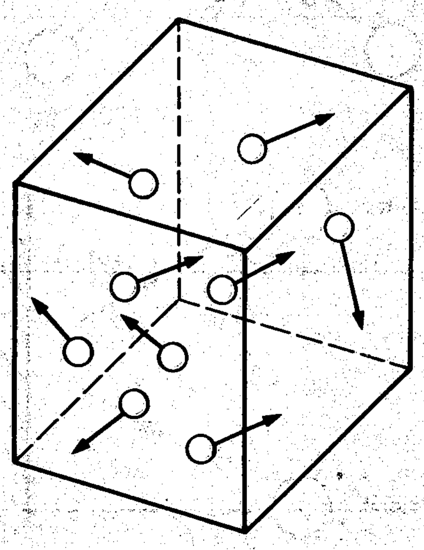
$$\mathbf{N} = 6.023 \times 10^{23}$$

James Clerk Maxwell (1831-1879), físico escocés, autor de la teoría electromagnética de la luz.

Este es el llamado número de Avogadro.

En efecto, consideremos un sistema formado por un gramo-mol de gas confinado a una región del espacio de volumen **V** y que por simplicidad supondremos es un cubo **Q** de lado l. Así pues:

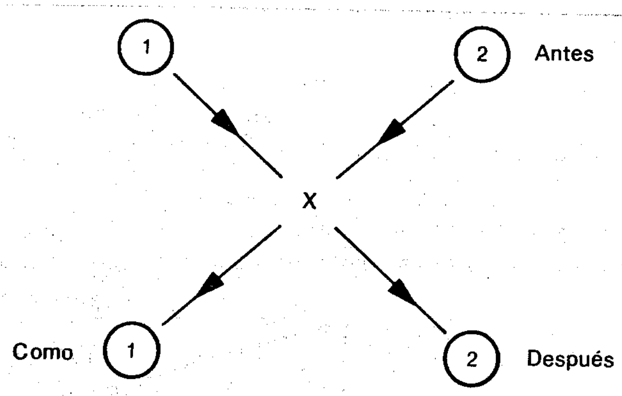
$$\mathbf{V} = l^3.$$



Entonces dicho gas consta de **N** moléculas, las cuales se mueven libremente dentro del cubo chocando entre sí y también con las paredes de **Q.** El resultado de estos choques contra las paredes es precisamente lo que se manifiesta macroscópicamente como **presión.** Por otro lado, el grado de movimiento de las partículas del sistema dará la energía total del mismo, lo que será mayor cuanto más alta sea la velocidad de las moléculas.

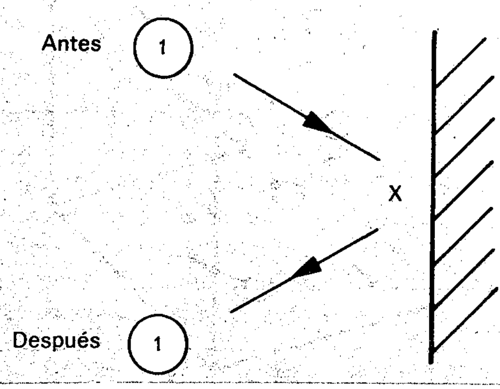
Para simplificar las cosas, supondremos que todas las moléculas tienen la misma masa **m** y que ésta es lo suficientemente pequeña como para que sean despreciables los cambios en energía potencial que sufren las partículas al moverse dentro de **Q.** Más aún, supondremos que las partículas se mueven libremente, sin que medie ninguna fuerza de atracción o repulsión entre ellas y que todos los choques, tanto:

Partícula — partícula



como:

Partícula — pared



son elásticos.

Esto lo tomamos prestado de la física

En los libros de física se hace ver cómo un gas de este tipo (gas ideal o gas perfecto) necesariamente tienen una energía total directamente proporcional a la temperatura absoluta.

$$U \alpha T$$

y, de manera más precisa,

$$U = \frac{3}{2} RT,$$

condición que de hecho define **a los gases perfectos.**

Igual que en la unidad 1 de este Módulo, sean $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n$ los diferentes valores que puede tomar la energía de cada una de las **N** moléculas, y sea:

$$\Omega = \{\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n\}^N$$

el espacio de posibles configuraciones. Para cada solución de la ecuación:

$$\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{r}_n = \mathbf{N},$$

con

$\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ enteros no negativos,

sea:

$$\mathbf{A}_{r_1, \ldots, r_n}$$

la correspondiente configuración distinguible.

Para cada configuración $\omega \in \Omega$, digamos:

$$\omega = (\mathbf{E}_{i_1}, \ldots, \mathbf{E}_{i_N}).$$

Sea:

$$\mathbf{E}(\omega) = \mathbf{E}_{i_1} + \ldots + \mathbf{E}_{i_n}$$

la **energía total** del gas en **Q.**

Queda así definida una función $\mathbf{E} : \Omega \to \mathbb{R}$. Suponiendo que se han colocado los valores de la energía por orden de magnitud, y:

$$\mathbf{E}_1 \leq \ldots \leq \mathbf{E}_n$$

los valores de **E** están comprendidos entre:

$$\mathbf{NE}_1$$

y

$$\mathbf{NE}_n$$

Supongamos que $\omega', \omega'' \in \Omega$ están en la misma configuración distinguible,

$$\omega', \omega'' \in \mathbf{A}_{r_1 \ldots r_n}$$

Entonces:

$$\mathbf{E}(\omega') = \mathbf{r}_1 \mathbf{E}_1 + \ldots + \mathbf{r}_n \mathbf{E}_n = \mathbf{E}(\omega'')$$

Por lo que:

Todas las configuraciones en una misma configuración distinguible corresponden al mismo valor de la energía total del gas.

O, dicho de otra manera:

E es constante en cada configuración distinguible.

E será entonces una variable aleatoria, para cualquiera de los tres modelos probabilísticos (**MB**, **BE** o **FD**) que hemos construido en la primera unidad, al que denotaremos como:

$$< \Omega, a, \mathbf{P} >,$$

en donde el promedio o valor esperado será su esperanza matemática con respecto a **P**; lo denotaremos por la letra **U** y lo llamaremos la **energía interna** del sistema de partículas, es decir, del gramo-mol de gas. Así pues,

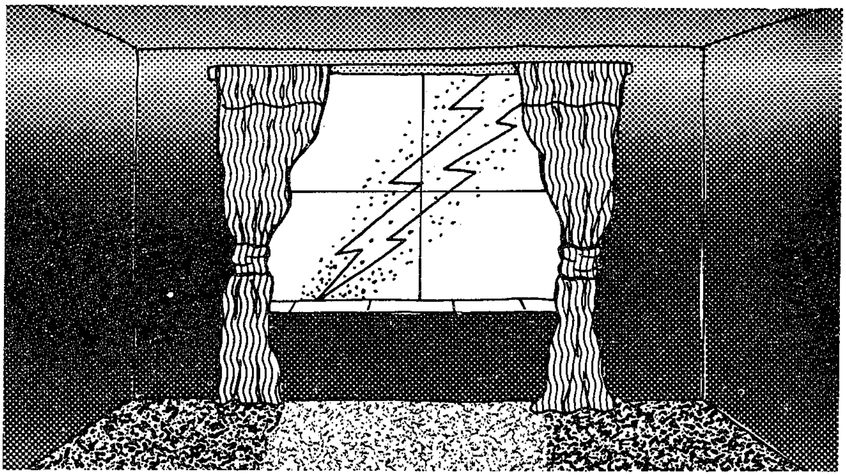
Aquí se define la energía interna del gas

$$\mathbf{U} = \sum (\mathbf{r}_1 \mathbf{E}_1 + \ldots + \mathbf{r}_n \mathbf{E}_n)\, \mathbf{P}(\mathbf{A}_{r_1 \ldots r_n}),$$

donde la suma se extiende a todas las:

$$\binom{\mathbf{n} + \mathbf{N} - 1}{\mathbf{n} - 1}$$

configuraciones distinguibles que pueden darse.

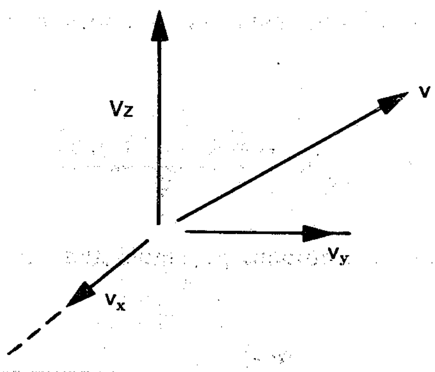


Por otro lado, si una molécula dada tiene velocidad:

Aquí se calcula la energía interna del gas

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x\,\mathbf{i} + \mathbf{v}_y\,\mathbf{j} + \mathbf{v}_z\,\mathbf{k}$$

La velocidad es un vector, ¿no?



entonces su energía cinética es:

$$\frac{1}{2}\mathbf{m}\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{m}\,(\mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2 + \mathbf{v}_z^2)$$

y, de hecho, es toda la energía de dicha molécula, en virtud de las hipótesis que estamos manejando. Dado que la energía sólo puede tomar los valores:

$$\mathbf{E}_1 \ldots , \mathbf{E}_n$$

para cada molécula, debe tenerse que:

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2 + \mathbf{v}_z^2 = \frac{2\,\mathbf{E}_i}{\mathbf{m}}$$

para algún valor de **i**, y éstos son todos los valores que $\mathbf{v}^2$ puede tomar.

¿Entendió por qué?

Para una configuración distinguible dada $\mathbf{A}_{r_1 \ldots r_n}$, la energía total del sistema de partículas es:

$$\mathbf{r}_1 \mathbf{E}_1 + \ldots + \mathbf{r}_n \mathbf{E}_n;$$

por lo que, en promedio, cada molécula tiene una energía igual a:

$$\frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{E}_1 + \ldots + \mathbf{r}_n \mathbf{E}_n}{\mathbf{N}}$$

$$= \frac{\mathbf{m}}{2} \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{v}_1^2 + \ldots + \mathbf{r}_n \mathbf{v}_n^2}{\mathbf{N}}.$$

Si definimos el valor cuadrático promedio de la velocidad de las moléculas cuando el gas está en la configuración distinguible $\mathbf{A}_{r_1 \ldots r_n}$ como:

$$\mathbf{v}^2_{r_1 \ldots r_n} = \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{v}_1^2 + \ldots + \mathbf{r}_1 \mathbf{v}_n^2}{\mathbf{N}};$$

entonces, la energía promedio por molécula en dicha configuración es:

$$\frac{\mathbf{m}\, \mathbf{v}^2_{r_1 \ldots r_n}}{2}.$$

La energía interna es el promedio de los valores de la energía total sobre todas las configuraciones distinguibles

En cuanto a la energía interna del gas, es:

$$\mathbf{U} = \sum (\mathbf{r}_1 \mathbf{E}_1 + \ldots + \mathbf{r}_n \mathbf{E}_n)\, \mathbf{P}\,(\mathbf{A}_{r_1 \ldots r_n})$$

$$= \frac{\mathbf{mN}}{2} \sum \left(\frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{v}_1^2 + \ldots + \mathbf{r}_n \mathbf{v}_n^2}{\mathbf{N}} \right) \mathbf{P}\,(\mathbf{A}_{r_1 \ldots r_n})$$

$$= \frac{\mathbf{mN}}{\mathbf{z}} \sum \mathbf{v}^2_{r_1 \ldots r_n}\, \mathbf{P}\,(\mathbf{A}_{r_1 \ldots r_n}).$$

Finalmente, definamos la **velocidad cuadrática media** para el gas como:

$$< v^2 > = \sum v^2_{r_1 \ldots r_n} P(A_{r_1 \ldots r_n});$$

entonces:

$$U = \frac{mN}{z} < v^2 > .$$

Finalmente, si definimos la **temperatura** del gas mediante:

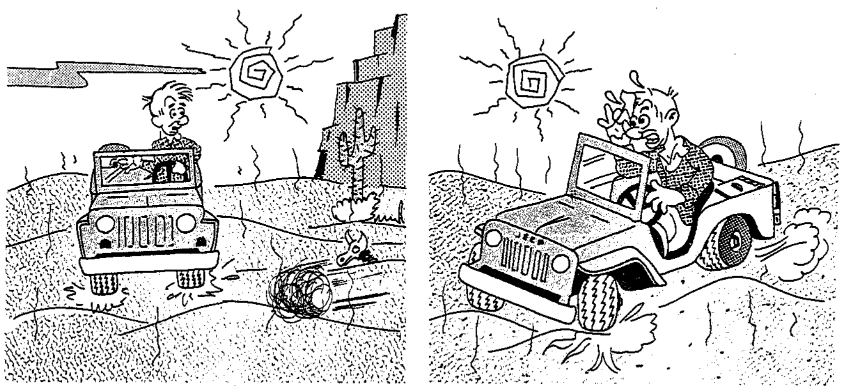
$$T = \frac{2}{3R} U$$

(esto es lo que quiere decir que el gas sea ideal) entonces,

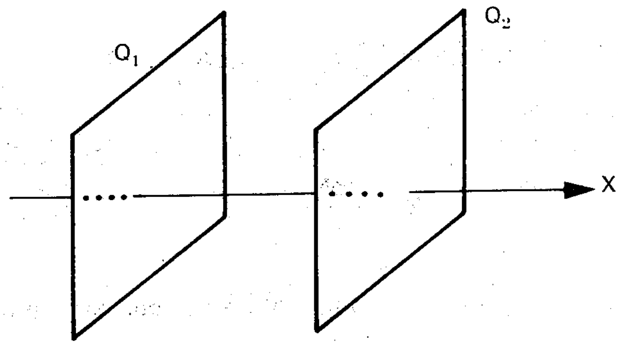
$$T = \frac{mN}{3R} < v^2 >$$

En la mecánica estadística se definen los observables macroscópicos como promedios de las magnitudes dinámicas microscópicas

Esta última relación dice que el gas estará tanto más caliente cuanto más acelerado sea el movimiento de sus moléculas.

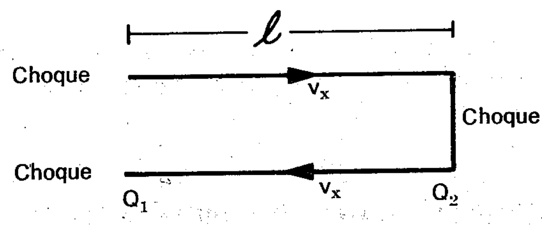


Por otro lado, podemos también calcular la presión que sobre las paredes de **Q** ejercen los choques de las moléculas. Dado que la presión se reparte uniformemente en la superficie de **Q,** podemos limitarnos a estudiar una de las caras, en las demás ocurrirá lo mismo. En efecto, sean $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$ dos caras paralelas y sea $\mathbf{x}$ la dirección perpendicular a ambas.



Aquí las moléculas se ven como bolas velocísimas de billar

Las moléculas rebotan de $\mathbf{Q}_1$ a $\mathbf{Q}_2$ y luego de regreso sin perder energía; es decir, sin alterar el valor absoluto de la velocidad, aunque sí el sentido. Esquemáticamente podemos representar lo anterior mediante:



El tiempo transcurrido entre los dos choques consecutivos en $\mathbf{Q}_1$ es:

$$\Delta \mathbf{t} = 2\, l/\mathbf{v}_x.$$

Suposición

Supongamos que el movimiento de las moléculas es tan rápido que puede despreciarse el tiempo que pasan viajando y que, de hecho, $\Delta \mathbf{t}$ es el tiempo que dura una colisión.

El cambio de momento lineal que tiene lugar durante el choque en $\mathbf{Q}_2$ es:

$$\mathbf{mv}_x - (-\,\mathbf{mv}_x) = 2\,\mathbf{mv}_x,$$

momento que es transferido a Q_2 mismo, desarrollándose así la fuerza:

Fuerza = cambio de momento lineal por unidad de tiempo

$$\frac{2\,mv_x}{\Delta t} = \frac{mv_x^2}{l}$$

de acuerdo con la segunda ley de Newton.

Según la configuración $A_{r_1 \ldots r_n}$ hay r_1 moléculas de velocidad v_x^1, r_2 moléculas de velocidad v_x^2, etc.; de manera que la fuerza total que ejercen las moléculas sobre Q_2 es:

$$\frac{m}{l}\{r_1 (v_x^1)^2 + \ldots + r_n (v_x^n)^2\}$$

$$= \frac{mN}{l} \frac{r_1 (v_x^1)^2 + \ldots + r_n (v_x^n)^2}{N}$$

$$= \frac{mN}{l} (v_x^2)_{r_1 \ldots r_n}.$$

Así pues, la presión que se ejerce cuando el gas está en la configuración distinguible $A_{r_1 \ldots r_n}$ es:

$$\frac{mN}{l^3} (v_x^2)_{r_1 \ldots r_n}$$

$$= \frac{mN}{V} (v_x^2)_{r_1 \ldots r_n}.$$

Q_2 **tiene área** l^2 y l^3 **es el volumen de** Q

Finalmente, la presión que se ejerce sobre Q_2 (o sobre cualquier otra cara) se obtiene promediando este valor sobre todas las configuraciones distinguibles; es decir,

$$P = \frac{mN}{v} \sum (v_x^2)_{r_1 \ldots r_n} P(A_{r_1 \ldots r_n})$$

$$= \frac{mN}{v} <v_x^2>,$$

La presión como promedio estadístico de los pequeños efectos de cada choque contra las paredes

donde $<v_x^2>$ (la **velocidad cuadrática media** en la dirección **X**) es la esperanza matemática de la variable aleatoria:

$$(v_x^2)_{r_1 \ldots r_n}$$

con respecto a **P**.

Por cierto, nada tiene de particular la dirección **X** elegida, por lo que, suponiendo **isotrópico** el movimiento del gas, debe tenerse que:

$$<v_x^2> = <v_y^2> = <v_z^2>$$

y dado que:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

resulta que:

$$<v^2> = <v_x^2> + <v_y^2> + <v_z^2> = 3 <v_x^2>;$$

es decir:

$$<v_x^2> = \frac{1}{3} <v^2>$$

y, por lo tanto:

$$\boxed{P = \frac{mN}{3v} <v^2>}$$

Así pues, la presión es mayor cuanto más acelerado sea el movimiento de las moléculas.

Podemos observar de las últimas dos ecuaciones encerradas en un cuadro que:

$$<v^2> = \frac{3RT}{mN} = \frac{3PV}{mN},$$

en donde se tiene finalmente que:

$$\boxed{PV = RT}$$

Ley de los gases perfectos

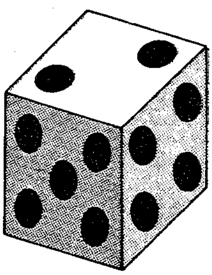
es la ecuación de estado de un gas perfecto para una mol de gas.

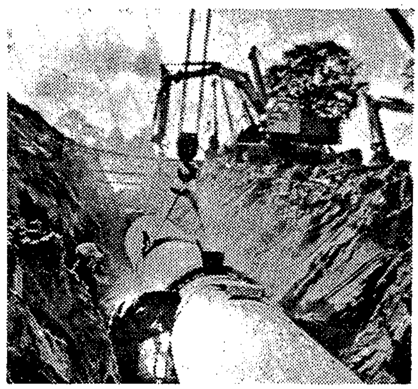
Repase la deducción anterior para ver si ha entendido la física y la lógica que están implícitas. Haga una lista de las suposiciones que hemos tenido que hacer a lo largo de la deducción, para que esté consciente de las limitaciones de esta teoría cinética de los gases. Por supuesto, toda teoría física requiere de hipótesis en qué basarse, y esas son sus limitaciones.

¿Ya se dio cuenta de las limitaciones que presenta la teoría cinética de los gases?

¿No le resultó interesante la idea de pasar de las propiedades microscópicas a las macroscópicas gracias a la probabilidad y, en particular, al concepto de esperanza matemática?

¡Reflexione!





EJERCICIOS DE APLICACION

N.B.

Estos ejercicios han sido preparados para que usted aplique lo que aprendió. Realícelos, le ayudarán a reafirmar sus conocimientos. Si tiene alguna duda, consulte a su asesor.

La manera de comprobar la exactitud de sus respuestas es comparándolas con el contenido incluido en el texto y/o comentándolas con su asesor.

CUBRA CON LA SOLAPA DEL FORRO ESTA AREA DE RESPUESTAS Y LEVANTELA CADA VEZ QUE QUIERA COMPROBAR LA RESPUESTA CORRECTA.

1. Investigue en la bibliografía sugerida o en la que usted considere conveniente el significado del término:

   Isotropía: ______________________________

   ____

   ____

2. Mencione 2 problemas específicos en los que se utilizaría el concepto de esperanza o valor esperado.

3. Defina en sus propios términos qué es el valor esperado.

4. Conteste a la última pregunta del ejemplo de la página 150.

4.

Si $\mathbf{k} = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6,$

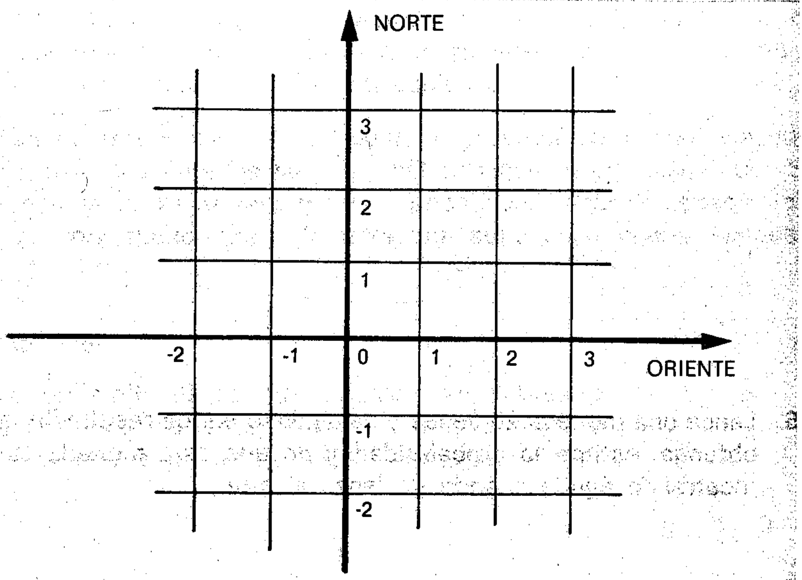
entonces:

$$\mathbf{P}[\mathbf{X} = \mathbf{k}] = \mathbf{P}[2\mathbf{Y} - 6 = \mathbf{k}]$$

$$= \mathbf{P}[\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{k}+6}{2}]$$

$$= \binom{6}{\frac{k+6}{2}} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k+6}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^{6-\frac{k+6}{2}}$$

5. Pedro realizará una caminata aleatoria en el plano de la siguiente manera. En cada etapa lanzará al aire una moneda pintada de negro y una moneda pintada de rojo, ambas tienen probabilidad 3/4 de caer águila. Si la moneda negra cae mostrando águila, entonces él caminará una cuadra hacia el norte y si cae sol caminará una cuadra al sur. Si la moneda roja cae mostrando águila, entonces él caminará una cuadra al oriente y en caso contrario caminará una cuadra al poniente.



a. ¿Cuál es la probabilidad de que Pedro se encuentre en la posición (0,2) al cabo de seis etapas?

b. ¿Cuál es la posición esperada de Pedro al cabo de 6 etapas?

5.

a. Suponiendo que hay independencia entre el lanzamiento de la moneda negra y el de la roja, y si **X** y **Y** denotan respectivamente la posición horizontal y la vertical, entonces:

$$\mathbf{P}[\mathbf{X}=0, \mathbf{Y}=2] =$$

$$\mathbf{P}[\mathbf{X}=0]\,\mathbf{P}[\mathbf{Y}=2]$$

$$=\binom{6}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\binom{6}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$=\binom{6}{3}\binom{6}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^7\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

b. De la misma manera que en el ejemplo de la página 150, definimos a las variables aleatorias:

$\mathbf{X}_j$ y $\mathbf{Y}_j$;

entonces:

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{6} \mathbf{X}_j \text{ y}$$

$$\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^{6} \mathbf{Y}_j$$

La respuesta es el punto de coordenadas $(\mathbf{E(X)}, \mathbf{E(Y)})$; es decir, el punto $(3,3)$.

6. Lance una moneda 20 veces y basándose en los resultados que obtenga, estime la probabilidad **p** de que esta moneda caiga mostrando águila cuando se lanza al aire.

N.B. Después de haber realizado los ejercicios, usted podrá afirmar su aprendizaje. Lo que no haya sido muy claro o no haya podido captar perfectamente, coméntelo con su asesor.

SUGERENCIAS DE ESTUDIO

Para ampliar su información se sugiere que:

- Consulte los siguientes libros:

FELLER, WILLIAM, **An Introduction to Probability Theory and its Applications**, Vol. I, New York, Edit. John Wiley & Sons, 1968, cap. IX.

HERNANDEZ LERMA, ONESIMO, **Elementos de probabilidad y estadística,** México, Edit. Fondo de Cultura Económica, 1979, cap. 3.

RUIZ MONCAYO, ALBERTO, **Introducción y métodos de probabilidad,** México, Edit. Trillas, 1973, caps. 4, 5 y 6.

AUTOEVALUACION

CUBRA CON LA SOLAPA DEL FORRO
ESTA AREA DE RESPUESTAS
Y LEVANTELA
CADA VEZ QUE QUIERA COMPROBAR
LA RESPUESTA CORRECTA.

Ahora que ha terminado el estudio de la unidad, evalúe sus conocimientos. Esto le ayudará a prepararse para la evaluación final del Módulo. Siga las instrucciones.

Instrucciones

Lea cuidadosamente la pregunta o proposición inicial. Después de cada una de ellas hay afirmaciones que las complementan. Seleccione la **mejor respuesta** y rellene con lápiz el espacio inferior correspondiente a la letra que seleccionó como respuesta.

Usted debió haber marcado el espacio debajo de la letra:

Ejemplo:

La probabilidad de que ocurran simultánea o sucesivamente los eventos **A** y **B** es igual a la probabilidad de que ocurra el evento **A** multiplicada por:

a b c d

a. $\mathbf{P(B)}$.

b. $\mathbf{P(B^C)}$.

c. $\mathbf{P(B|A)}$.

d. $\mathbf{P(\Omega)}$.

c

1. La probabilidad de que ocurran simultáneamente o sucesivamente los eventos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ es igual a $\mathbf{P(A_1 \cap A_2)}$ multiplicada por:

a b c d

a. $\mathbf{P(A_3)}$.

b. $\mathbf{P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)}$.

c. $\mathbf{P(A_3 \mid A_2)}$.

d. $\mathbf{P(A_3 \mid A_2 - A_1)}$.

b

2. Dados los eventos **A** y **B** con $\mathbf{A \subset B}$ y $\mathbf{P(A)} > 0$, entonces $\mathbf{P(B \mid A)}$ es igual a:

a b c d

a. 1.

b. 0.5.

c. 0.

d. 0.3.

a

a

3. Si los eventos **A** y **B** son ajenos; es decir, si $\mathbf{A \cap B} = \phi$ y si $\mathbf{P(A)} > 0$, entonces $\mathbf{P(B \mid A)}$ es igual a:

a b c d
|| || || ||

a. 0.

b. 1.

c. **P(B)**

d. 0.5.

d

4. Dados los eventos **A,B** con $\mathbf{P(A)} > 0$, entonces $\mathbf{P(B - A \mid A)}$ es igual a:

a b c d
|| || || ||

a. $\mathbf{P(B \mid A)}$.

b. $\mathbf{P(B^c \mid A)}$.

c. 1.

d. 0.

b

5. Si $\mathbf{P(A)} > \frac{1}{2}$ y $\mathbf{P(B)} > \frac{1}{2}$, entonces $\mathbf{P(B \mid A)}$ es:

a b c d
|| || || ||

a. 0.

b. Mayor que cero.

c. Mayor que $\frac{\mathbf{P(B)}}{\mathbf{P(A)}}$.

d. 1.

b

6. Si los eventos **A,B** son independientes y si, además, $\mathbf{A \cap B} = \phi$, entonces:

a b c d
|| || || ||

a. $\mathbf{P(A)} = \mathbf{P(B)} = 1$.

b. $\mathbf{P(A)} = 0$ o $\mathbf{P(B)} = 0$.

c. $\mathbf{P(A \cup B)} < \mathbf{P(A)} + \mathbf{P(B)}$

d. $\mathbf{P(A - B)} < \mathbf{P(A)}$.

7. **A** y **B** con $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ y $\mathbf{P(B)} < 1$, son independientes si:

a b c d
|| || || ||

c

a. $\mathbf{P(A)} = \mathbf{P(B)} = \frac{1}{2}$.

b. $0 < \mathbf{P(A)} < \frac{1}{2} < \mathbf{P(B)} < 1$.

c. $\mathbf{P(A)} = 0$ o $\mathbf{P(B)} = 0$.

d. $\mathbf{P(A)} < \frac{1}{2}, \mathbf{P(B)} < \frac{1}{2}$.

8. **A**,**B** y **C**, con $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{C}$ son mutuamente independientes si:

a b c d
|| || || ||

b

a. $\mathbf{P(A)} = \mathbf{P(B)} = \mathbf{P(C)} = \frac{1}{2}$.

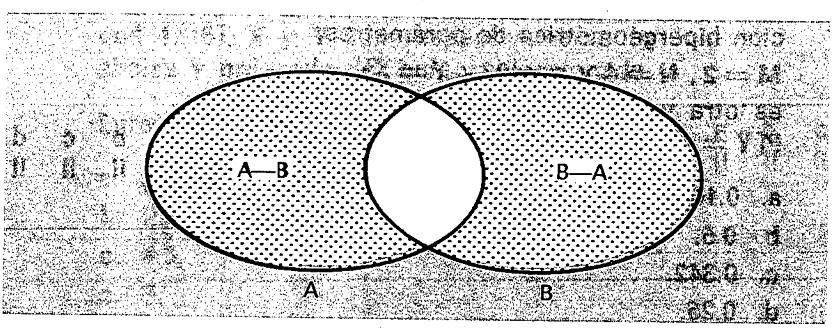
b. $\mathbf{P(C)} = 0$.

c. $\mathbf{P(C)} = 1$ y $\mathbf{P(A)} = \mathbf{P(B)} = \frac{1}{2}$.

d. $0 = \mathbf{P(A)} < \mathbf{P(B)} < \mathbf{P(C)} < 1$.

. La diferencia simétrica entre dos eventos **A** y **B** se define por medio de:

$\mathbf{A} \,\Delta\, \mathbf{B} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} - \mathbf{A})$



d

Si **A**,**B** con $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$ son independientes, entonces $P(A \,\Delta\, B)$ es igual a:

a b c d
|| || || ||

a. $P(A) + P(B)$.

b. $P(A) - P(B)$.

c. $P(A) - P(B - A)$.

d. $P(A)\, P(B^C) + P(A^C)\, P(B)$.

b

10. Si **X** es una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros $n = 4$ y $p = \frac{1}{2}$; y $Y = X^2$ es otra variable aleatoria. Se tiene que $P[Y = 4]$ es igual a:

a b c d
|| || || ||

a. 0.5.

b. 0.375.

c. 0.81.

d. 0.33.

b

11. Si **X** es una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros $n = 4$ y $p = \frac{1}{2}$, $Y = 2\,(X^2 - 2)$ es otra variable aleatoria y se tiene que $P[Y = 4]$ es igual a:

a b c d
|| || || ||

a. 0.5.
b. 0.375.
c. 0.81.
d. 0.33.

a

12. Si **X** es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica de parámetros: $M = 2$, $N = 4$ y $n = 2$, y $Y = X^2$ es otra variable aleatoria, y se tiene que $P[Y = 4]$, es igual a:

a b c d
|| || || ||

a. 0.1666.
b. 0.5.
c. 0.342.
d. 0.25.

13. Si **X** es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica de parámetros: a b c d a

|| || || ||

$\mathbf{M} = 2, \mathbf{N} = 4$ y $\mathbf{n} = 2$, y $\mathbf{Y} = \mathbf{x} - 1$

es otra variable aleatoria, y se tiene que **P[Y = 2]**, es igual a:

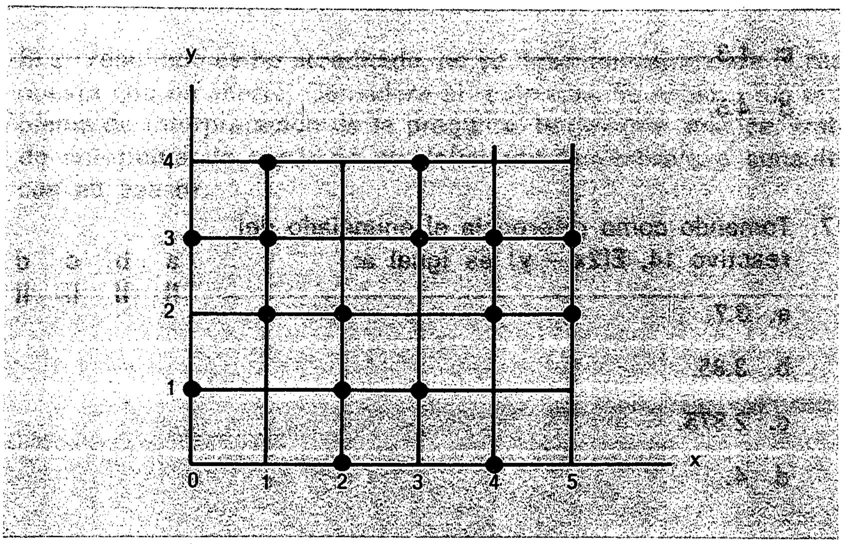
a. 0.

b. 0.666.

c. 0.1666.

d. 0.25.

14. Uno de los puntos del siguiente diagrama



será escogido al azar (es decir, cada uno de ellos será seleccionado con probabilidad 1/16), **X** y **Y** son respectivamente la abcisa y ordenada del punto seleccionado.

Entonces **E(X)** es igual a: a b c d b

|| || || ||

a. 1.3.
b. 2.5.
c. 4.5.
d. 7.

d

15. Tomando como referencia el enunciado anterior **E(XY)** es igual a:

a b c d
|| || || ||

a. 2.

b. 3.

c. 5.

d. 5.25.

a

16. Tomando como referencia el enunciado del reactivo 14, **E(Y)** es igual a:

a b c d
|| || || ||

a. 2.125.

b. 2.5.

c. 1.3.

d. 4.5.

c

17. Tomando como referencia el enunciado del reactivo 14, **E(2x — y)** es igual a:

a b c d
|| || || ||

a. 3.7.

b. 3.85.

c. 2.875.

d. 4.

Sume las respuestas:

¿**Cuántos puntos alcanzó?**

- Correctas: ____________
- Incorrectas: ____________

Verifique su capacidad de aprendizaje.

- Excelente: 16 a 17
- Muy bien: 14 a 15
- Bien: 12 a 13
- Regular: 10 a 11
- No acreditado: 1 a 9

Si su resultado es **no acreditado,** no se desanime. Compare la respuesta que no acertó. Considere si realmente no sabía o fue problema de interpretación de la pregunta. Reflexione, analice, trate de determinar la razón de su deficiente aprendizaje o consulte con su asesor.

Si usted ha realizado satisfactoriamente las autoevaluaciones de cada unidad, usted ha confirmado sus conocimientos. Ahora está listo para la evaluación final de este Módulo.

¿ESTA USTED SATISFECHO DE SU AUTOEVALUACION?

BIBLIO GRAFIA

FELLER, WILLIAM, **An Introduction to Probability Theory and its Applications,** Vol. I, New York, Edit. John Wiley & Sons, 1968.

FRECHET, MAURICE, **Las matemáticas y lo concreto,** México, UNAM, 1958, 2a. parte, (Colec. Problemas científicos y filosóficos 10).

HERNANDEZ LERMA, ONESIMO., **Elementos de probabilidad y estadística,** México, Edit. Fondo de Cultura Económica, 1979.

RUIZ MONCAYO, ALBERTO, **Introducción y métodos de probabilidad,** México, Edit. Trillas, 1973.

SUPPES, PATRICK, **Introduction to Logic,** Princeton, New Jersey, Edit. Van Nostrand, Co., Inc., 1964.

COLABORADORES

CORRECCION:	Jefe Depto.: Vicente Ramos González. Correctores: David Cuatecontzi Castellanos, Marcos Gómez Morden, Patricia Guarneros Robles, Rodolfo Falcón Medina, Rodolfo Olivares López, Marcia Ardisson Pérez y Jesús Estrada Ruiz.
DISEÑO Y FORMACION:	Jefe Depto.: Juan Manuel Contreras Spíndola. Diseño y Formación: Beatriz Ponce Guerrero.
ILUSTRACION:	Jefe Depto.: Leonel Bello Cuevas. Dibujante: José Orozo Rodríguez.
FOTOGRAFIA:	Jefe Depto.: José Luis García Heredia. Fotógrafo: Alejandro Figueroa Valenzuela. Laboratorio: Mariano Luna Ramírez y Jesús Elio Zepeda Nava.